



Cálculo mental com números racionais: uma oportunidade para discutir aritmética e álgebra

Castelo Branco, 12 de julho de 2019

Renata Carvalho

Associação de Professores de Matemática

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

renatacarvalho@campus.ul.pt

$$12 + 4 = \square$$

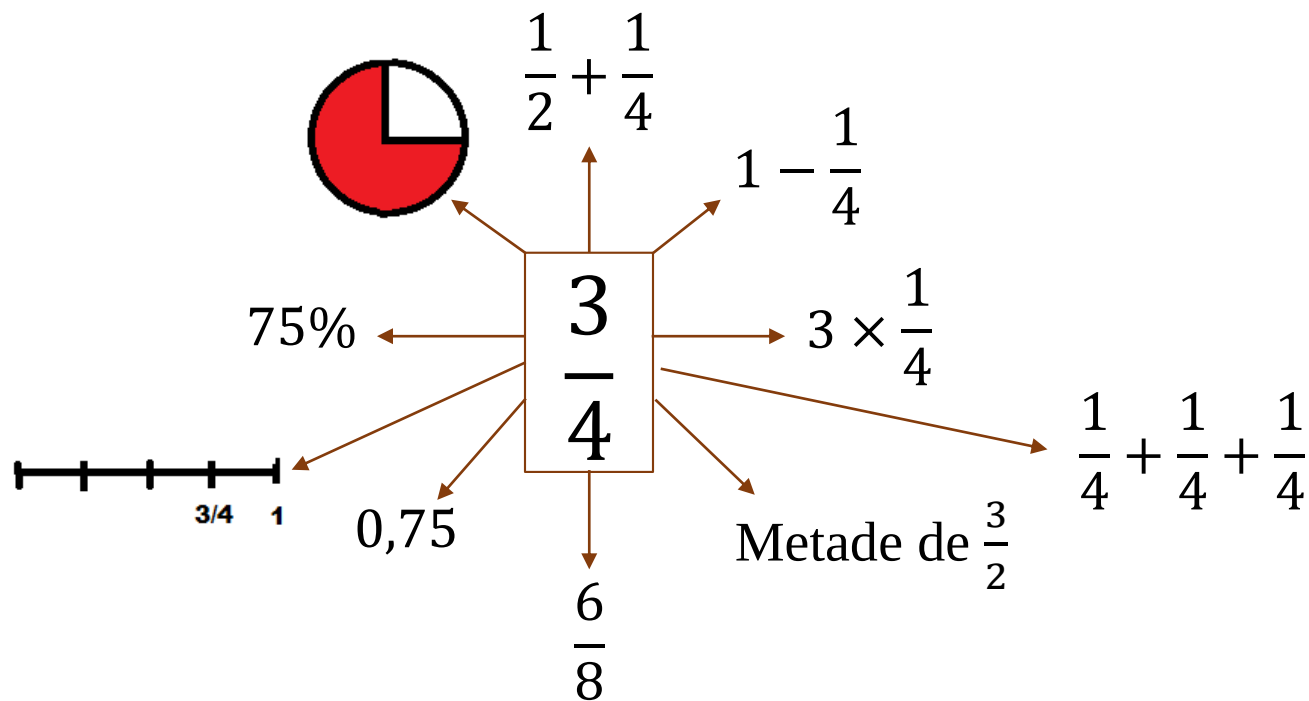
$$12 + \square = 16$$

$$16 = \square + 12$$

$$\square + 0,4 = 0,16 + 0,5$$

$$\frac{1}{4} \div \square = \frac{1}{2}$$

Números, operações e suas relações



Ideias-chave para a aprendizagem dos números

- **Compreender os números**

- O que são...
- Como se representam com objetos, dígitos ou na reta numérica,
- Como se relacionam uns com os outros,
- Como fazem parte de sistemas que têm estruturas e propriedades,
- Como é que se usam números e operações para resolver problemas.

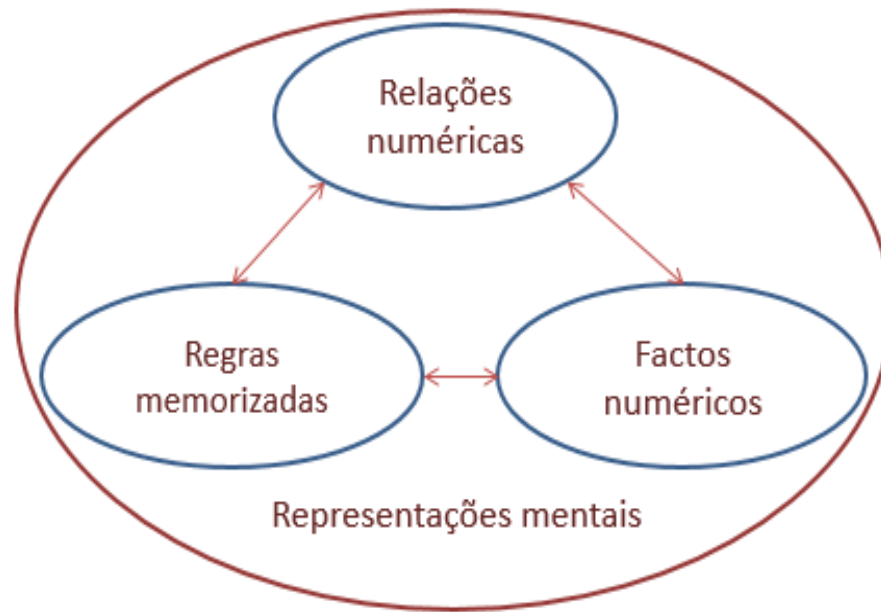
- **Desenvolver o sentido do número**

- Capacidade de decompor números naturalmente,
- Usar números particulares como referência, como 100 ou $\frac{1}{2}$,
- Usar as relações entre as operações aritméticas para resolver problemas,
- Compreender o sistema decimal de posição,
- Estimar,
- Compreender os números (*Make sense of numbers*),
- Reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números.

Ideias-chave para a aprendizagem dos números

- **Desenvolver a fluência computacional**
 - Conhecer as tabuadas (adição, subtração, multiplicação e divisão),
 - Usar métodos eficientes e rigorosos para calcular (eventualmente, combinações de estratégias mentais e de papel e lápis),
 - Ser capaz de explicar os seus métodos, compreender que existe sempre uma diversidade de métodos,
 - Ser capaz de estimar e de julgar a razoabilidade dos resultados.

Estratégias de cálculo mental



(Empson, Levi & Carpenter, 2010; Heirdsfield, 2011; Johnson-Laird , 1990)

Pensamento relacional envolve o uso das propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver um problema tendo em conta o seu contexto.

$$12 + 4 = \square$$

$$12 + \square = 16$$

$$16 = \square + 12$$

Preparar o cálculo mental com números racionais

- Importância dos contextos

$$\frac{1}{4} \div \text{---} = \frac{1}{2}$$

$$2,4 \div \frac{1}{2}$$

Uma tina tem de capacidade 22,5l . Quantos baldes de $\frac{1}{2}$ são necessários encher para despejar por completo a tina?

- Diferentes representações dos números racionais

20% de 50

$$2,4 \div \frac{1}{2}$$

- Antecipação de estratégias de cálculo mental dos alunos com números racionais

$$2,4 \div \frac{1}{2}$$

$$0,7 + \text{---} = 1$$

20% de 50

- Antecipação de erros dos alunos (de cálculo e conceituais)

Cálculo mental na sala de aula

✓ Dez tarefas de cálculo mental;

- Expressões com e sem valor em falta e situações contextualizadas;
- Diversas representações dos números racionais (fração, decimal, percentagem);
- Números de referência;
- Relações numéricas.

✓ Dinâmica:

- PowerPoint temporizado;
- 15 segundos para resolver cada expressão;
- 20 segundos para resolver cada situações contextualizadas;
- Discussão coletiva;
- Realização da tarefa (entre 30 e 90 minutos).

Estratégias de cálculo mental com números racionais

$$\frac{1}{2} - ? = \frac{1}{4}$$

Rogério: Temos a metade de um bolo. Comíamos metade [deste bolo] e ficamos só com um quarto. Então é metade menos $\frac{1}{4}$.

Se $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ então $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Relação entre expressões

Rui: $\frac{1}{2}$ equivale a 50 cêntimos e $\frac{1}{4}$ a 25 cêntimos. Fica 25 cêntimos.

Mudança de representação

Propriedade da subtração

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{3}$$

Maria:eu pus em número 0,111111

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{3}$$

Maria: A mim deu $\frac{1}{9}$, só que eu pus em número 0,111111... $\frac{1}{3}$ é igual a 0,33333. Mas depois 0,33333 a dividir por 3 é igual a 0,11111 porque isto é tipo a tabuada do 11, como 11 vezes 1, 11 vezes 2, 11 vezes 3. Aqui é ao contrário é a dividir por 3 que dá 11.

Mudança de
representação

Relação entre
operações

$$\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$$

Ana: Como eu sei que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ dá pus $\frac{1}{4}$ pus logo $\frac{1}{2}$.

se $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ então $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Relação entre
expressões

Gonçalo: Deu-me $\frac{1}{2}$. Eu fiz por porcentos . . . Vi $\frac{1}{4}$ é 25% e $\frac{1}{2}$ é 50. Então dividi . . . Eu fiz $\frac{1}{4}$ a dividir por $\frac{1}{2}$ que é $25 \div 50$.

Mudança de
representação

Propriedade da
divisão

$$1,9 - 0,50$$

Rui: 1 euro e 90 tirei . . . 10 cêntimos e no 50 menos 10 cêntimos. Então 1 euro e 80 menos 40. 1 euro e 40.

$$\text{se } 1,9 - 0,5 = (1,9 - 0,1) - (0,5 - 0,1)$$

então

$$1,8 - 0,40 = 1,40$$

Propriedade da
invariância do resto

$$4,2 \times 0,2 = 0,84$$

“Eu sei que 0,2 é equivalente a $\frac{1}{5}$, se for $\frac{1}{5}$ é a dividir por 5. Dá 8,4”

$$4,2 \times 0,2 = 4,2 \times \frac{1}{5}$$

$$4,2 \times \frac{1}{5} = 4,2 \div 5$$

$$4,2 = \frac{42}{10}$$

$$\frac{42}{10} = \frac{40}{10} + \frac{2}{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{40}{10} \times 10 \div 5 &= ? \times 5 = 40 \\ \frac{2}{10} \times 100 \div 5 &= ? \times 5 = 20 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{40}{10} \times 10 \div 5\right) + \left(\frac{2}{10} \times 100 \div 5\right)$$

Mudança de
representação

Mudança de
operação

“Fiz 8×5 . O 2 tenho que somar... Tenho que acrescentar casas decimais (...) até encontrar um número que multiplicado por 5 dê 2... é o 20... Dá 0,4”

Mudança de
representação

Decomposição

Propriedades das
operações

$$4,2 \times 0,2$$

$$42 \times 2 \times 0,1 \times 0,1$$

$$84 \times 0,1 \times 0,1$$

$$8,4 \times 0,1$$

$$0,84$$

$$0,82 \div ? = 1,64$$

Ivo: A mim deu-me... 5 décimas. Eu vi logo... Que 164 era o dobro de 82. Por isso, como era a dividir só podia ser 0,5.

Mudança de
representação

Relação entre
números

Relação entre
operações

$$5\% \text{ de } ? = 3$$

João: Então punha 3 berlindes dentro de um saco. Esse valia 5[%]. Depois ia buscar, ia buscar mais 95 sacos e enchia-os todos com 3 berlindes. Não, enchia 20 sacos cada um com 3 berlindes porque 5 vezes 20 dava o 100%. E depois fui contar os berlindes. 3 mais... Fiz 3 vezes 20.

Relação
parte-todo

A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $0,75l$ de refresco?

Ricardo: $\frac{1}{8}$ é um copo e 75% é $\frac{6}{8}$. . . $\frac{6}{8}$ é 6 copos.

Mudança de
representação

Frações
equivalentes

Para aprender Aritmética é
necessário pensar sobre Aritmética
de forma relacional

Pensamento relacional facilita o
desenvolvimento do pensamento
algébrico, minimizando erros e
equívocos



O pensamento relacional **não** se centra na realização de cálculos elaborados, ou conhecimento de truques de cálculo ou na memorização das propriedades dos números e das operações, mas sim no **raciocínio e na compreensão**.

Transição da Aritmética para a Álgebra com foco no pensamento relacional

- Foco em relações e não apenas no cálculo e na resposta numérica;
- Foco nas operações e suas inversas e na ideia relacionada de operar/não operar;
- Valorizar a representação e a resolução e não apenas a resolução;
- Compreender números e letras e não apenas os números;
- Compreensão do sinal de igual enquanto relação de equivalência;
- Diversidade de contextos de aprendizagem;
- Valorizar o uso de expressões de valor em falta;
- Promover discussões matemáticas na sala de aula.

Desenvolvimento do pensamento relacional

- Promove o aparecimento de **estratégias pessoais** que surgem em função da **compreensão** que cada criança tem dos números e das operações e onde esta usa relações numéricas para estabelecer novas relações para efetuar cálculos;
- Contribui para o desenvolvimento de conhecimentos acerca da **generalização das propriedades** dos números e das operações tornando-as mais explícitas – *pensamento algébrico*:
 - Promover **hábitos de pensamento e de representação** em que se procure a generalização, sempre que possível
 - Tratar os números e as operações algebricamente – prestar atenção às **relações** existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objetos formais para o pensamento algébrico
 - Promover o estudo de **padrões e regularidades**, a partir do 1.º ciclo.
- É a base para a aprendizagem da Álgebra nos níveis de escolaridades seguintes atenuando erros e equívocos dos alunos.



Cálculo mental com números racionais: uma oportunidade para discutir aritmética e álgebra

Obrigada!

Renata Carvalho

Associação de Professores de Matemática

UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

renatacarvalho@campus.ul.pt