MR 02 — O ensino dos Números na escolaridade básica: pontos críticos e abordagens

Cristina Morais

Graça Cebola

Teresa Olga Duarte

Lurdes Serrazina -Moderadora

Pontos críticos e abordagens

- no 1.º ciclo

- no 2.º ciclo

- no 3.º ciclo e ensino secundário

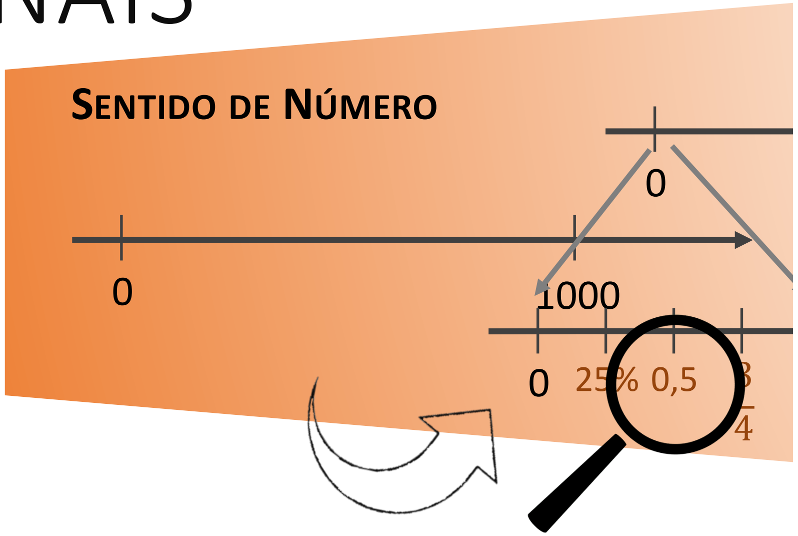
A aprendizagem dos números racionais na continuidade dos números inteiros
- 1.º CEB -

Mesa Redonda

O ensino dos Números na escolaridade básica: pontos críticos e abordagens

Cristina Morais
cristina.morais@campus.ul.pt

COMPREENDER NÚMEROS RACIONAIS



Extensões de conhecimento

e.g., “0,25 é maior que 0,5 porque 25 é maior que 5”

(e.g., Brocardo, 2010; McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993; Siegler & Braithwaite, 2017; Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Tripathi, 2008)

“0,25 é maior que 0,5 porque 25 é maior que 5” Que interpretação?

Misconception ou, em português, conceção errónea	Desconsideração pela perspetiva do aluno, cuja ideia é válida nas situações que lhe são familiares (25 > 5). Barreira entre “certo” e “errado”, conceção a evitar. (Confrey, 1991; Swan, 2001)
Conceção alternativa	vs. “conceções normais” ou conceção culturalmente aceite? Desvalorização do desenvolvimento do conceito pelo aluno, que não deixa de ser fundamentado e relacionado com várias ideias. (Confrey, 1991; Swan, 2001)

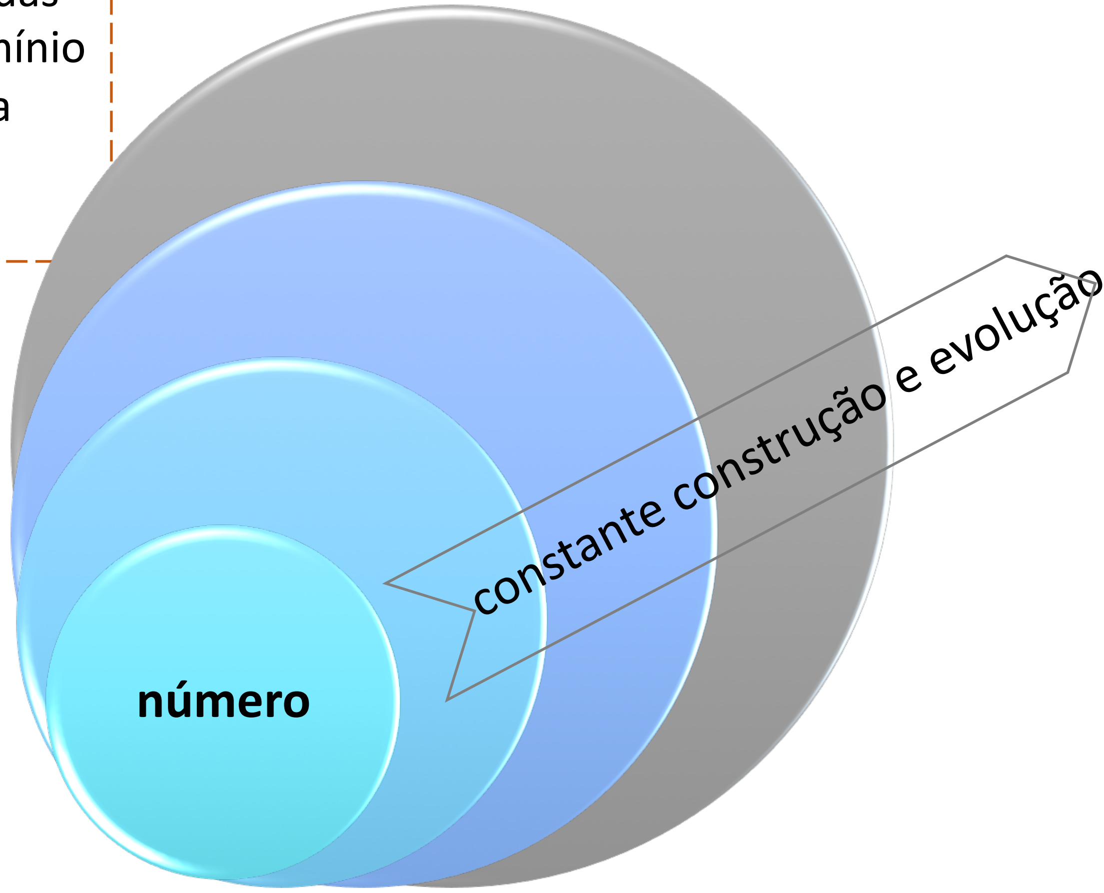
“0,25 é maior que 0,5 porque 25 é maior que 5” Que interpretação?

Extensões de conhecimento

Evidências de generalizações locais realizadas pelos alunos, válidas em determinado domínio e que podem não o ser quando aplicadas a domínios mais amplos, podendo levar a conclusões incorretas.

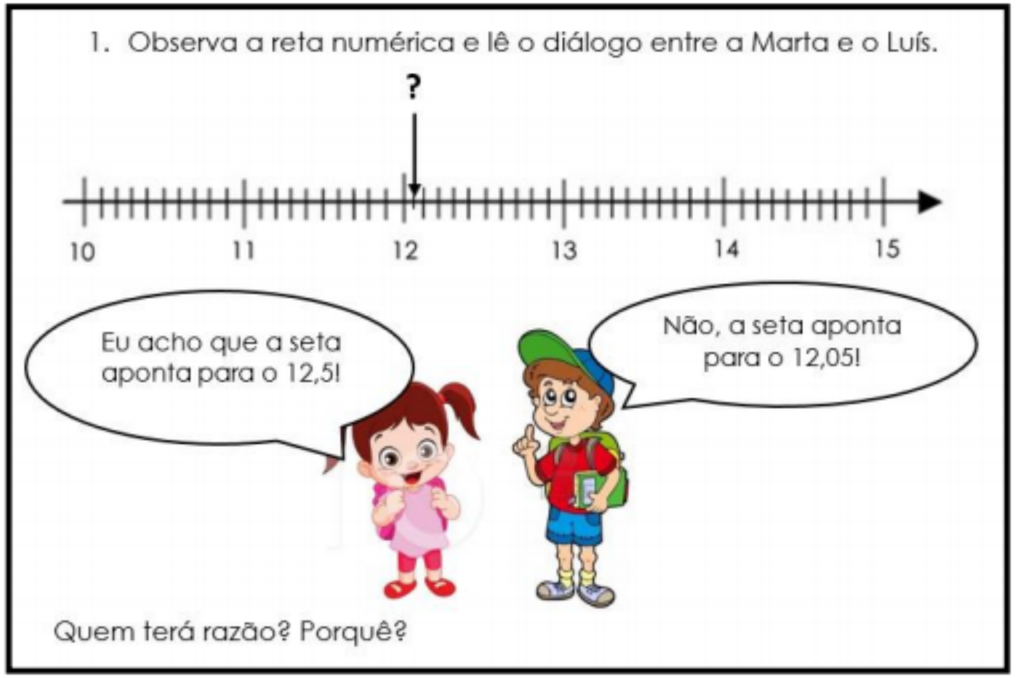
Naturais e parte integrante e potenciadora no percurso de aprendizagem

Evidência de uma transformação, gradual, da compreensão de número pelo aluno



Extensões de conhecimento - exemplos
comparação de números racionais em representação decimal

percurso de aprendizagem
algumas ideias-chave



Valorizar o uso de modelos que possibilitem a representação de unidades progressivamente menores (da parte não inteira de numeral decimal);

Fomentar a discussão de extensões de conhecimento, usadas pelos alunos ou sugeridas por tarefas, que conduzam a respostas corretas e incorretas;

Incentivar o estabelecimento de conjeturas e generalizações;

Incentivar a justificação e promover a validação de justificações em interação com os intervenientes da turma (alunos e professor);

Rute: Zero vírgula cinco e zero vírgula cinco de um quadradinho

O Luís tem razão porque a seta está a apontar para o meio de um retângulo e cada retângulo vale 10.

Bárbara: Mas também cinco... também é... o zero não vale nada, então é...

3.º ano

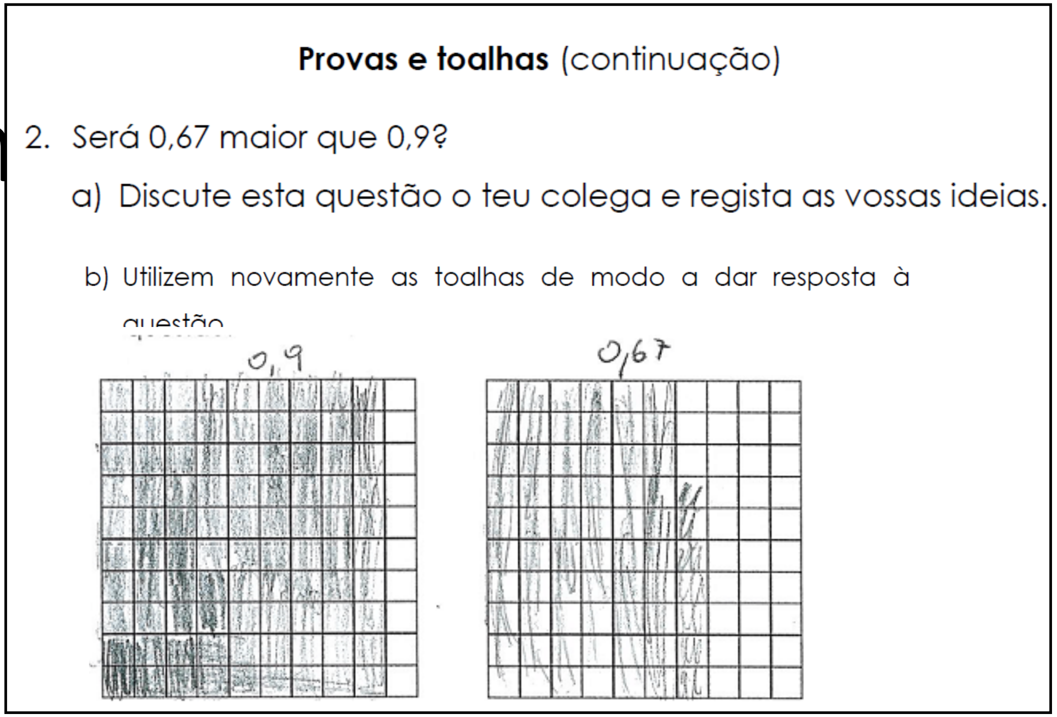
percurso de aprendizagem
algumas ideias-chave

Valorizar o uso de modelos que possibilitem a representação de unidades progressivamente menores (da parte não inteira de numeral decimal);

Fomentar a discussão de extensões de conhecimento, usadas pelos alunos ou sugeridas por tarefas, que conduzam a respostas corretas e incorretas;

Incentivar o estabelecimento de conjeturas e generalizações;

Incentivar a justificação e promover a validação de justificações em interação com os intervenientes da turma (alunos e professor);


Provas e toalhas (continuação)

2. Será 0,67 maior que 0,9?

a) Discute esta questão o teu colega e regista as vossas ideias.

b) Utilizem novamente as toalhas de modo a dar resposta à questão

Jorge: Primeiro pensei que zero vírgula sessenta e sete fosse maior que zero vírgula nove porque à primeira vista o sessenta e sete parece maior que o nove. . . Mas depois vi que podia pensar de outra maneira. Então, se nós pensarmos que cada coluna tem dez centésimas nós pintávamos seis colunas destas, sem o sete (em 0,67) ficava só sessenta. E o outro [0,9] ficava noventa centésimas, era maior que pintar sessenta e sete centésimas.

3.º ano

percurso de aprendizagem

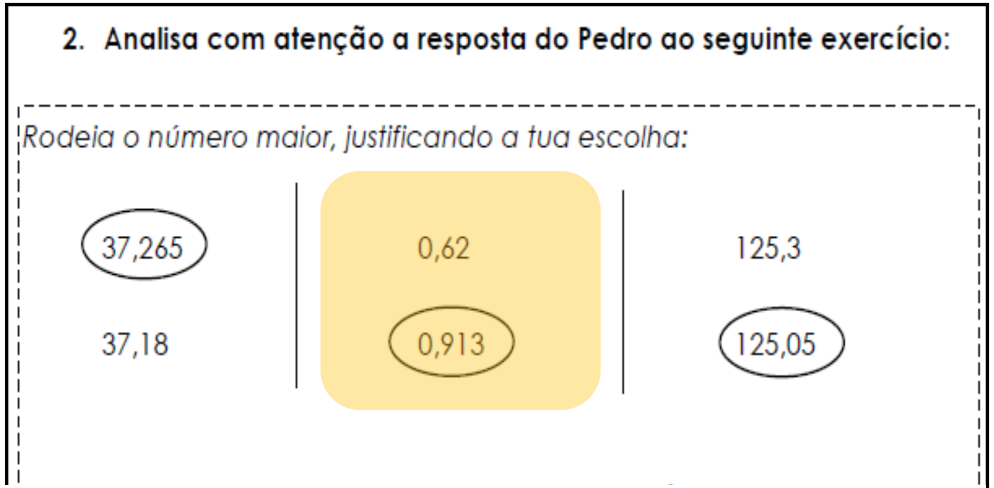
algumas ideias-chave

Valorizar o uso de modelos que possibilitem a representação de unidades progressivamente menores (da parte não inteira de numeral decimal);

Fomentar a discussão de extensões de conhecimento, usadas pelos alunos ou sugeridas por tarefas, que conduzam a respostas corretas e incorretas;

Incentivar o estabelecimento de conjeturas e generalizações;

Incentivar a justificação e promover a validação de justificações em interação com os intervenientes da turma (alunos e professor);



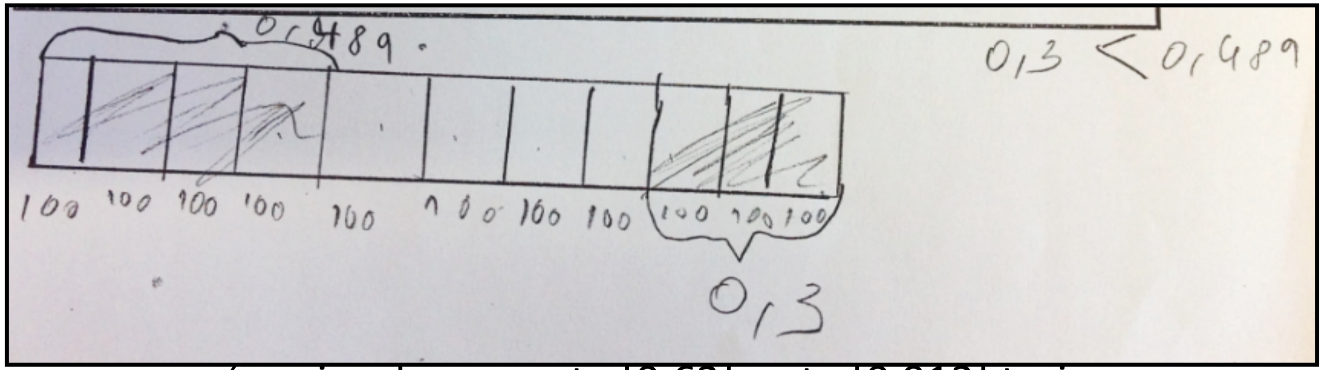
2. Analisa com atenção a resposta do Pedro ao seguinte exercício:

Rodeia o número maior, justificando a tua escolha:

37,265	0,62	125,3
37,18	0,913	125,05

Dinis procura um contraexemplo: 0,3 será maior que 0,489?

André: Mas, mas as décimas… como as décimas é uma unidade maior do que as milésimas, eu penso que este [0,3] é maior.



Jorge: Eu já percebi o meu erro. . . as partes valem menos, mas são mais!

Graça Cebola

Mesa Redonda

O ensino dos Números na escolaridade básica:
pontos críticos e abordagens

Pontos críticos…

1.º ciclo do ensino básico

NO1 Números e Operações
Adição
3. Adicionar números naturais
9. **Adicionar** dois quaisquer números naturais cuja soma seja inferior a 100, **adicionando dezenas com dezenas**, **unidades com unidades** com composição de dez unidades em uma dezena quando necessário, e privilegiando a **representação vertical de cálculo**.

NO2 Números e Operações
Adição e subtração
5. Adicionar e subtrair números naturais
5. **Subtrair** dois números naturais até 1000, privilegiando a **representação vertical do cálculo**.

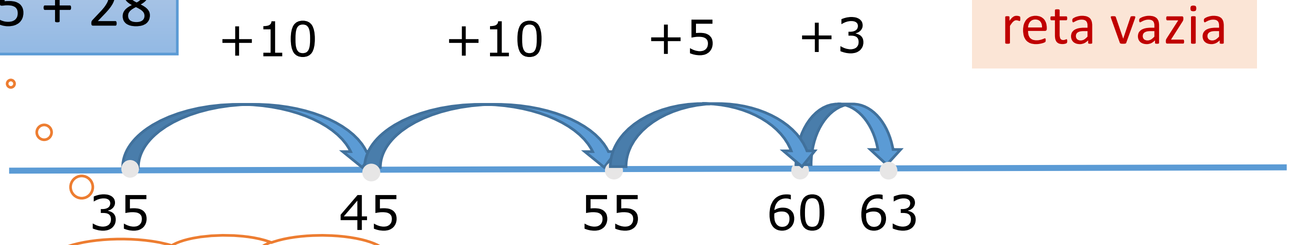
Apelo a processos de cálculo demasiado algorítmicos.

Programa e Metas Curriculares - Matemática – Ensino Básico, 2013

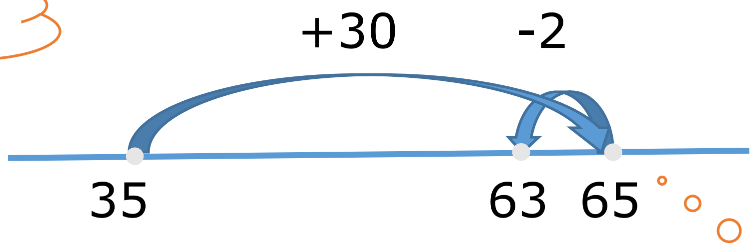
Uma abordagem…

35 + 28

reta vazia



28 = 10+10+5+3



28 = 30 – 2

Representação horizontal

- 35 + 28 = 33 + 2 + 28
  = 33 + 30

35 = 33 + 2
30 = 2 + 28

- 35 + 28 = 35 + 25 + 3
  = 60 + 3

28 = 25 + 3
10 = 5 + 5

Decomposição de

Factos básicos da adição

Propriedades da adição

Cálculo mental

Flexibilidade/adaptabilidade

Uma abordagem…

tabela dos 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

47 - 25

Representação horizontal

- 47 – 25 = 47 – 20 – 5
  = 27 – 5
  = 22

25 = 20 + 5

- 47 – 25 = 45 + 2 – 25
  = 45 – 25 + 2
  = 20 + 2
  = 22

47 = 45 + 2

O pensar os números de uma determinada forma influencia a escolha do processo de cálculo a desenvolver.

Uma abordagem…

152 - 87

- $152 - 87 = 140 + 12 - (80 + 7)$
  $= 140 - 80 + 12 - 7$
  $= 60 + 12 - 2 - 5$
  $= 60 + 10 - 5$
  $= 65$

152 = 140 + 12
87 = 80 + 7

534 - 118

- $534 - 118 = 534 - 120 + 2$
  $= 414 + 2$
  $= 416$

118 = 120 – 2

Representação horizontal

Decomposição de números
Factos básicos da
Propriedades das operações

Cálculo mental

No seu processo de resolução, cada um descreve a maneira como pensou os números e como trabalhou com eles.

Flexibilidade/adaptabilidade

Uma concretização…

1.º ciclo do ensino básico

1.º ano
Números e Operações
Adição e subtração

Reconhecer e memorizar **factos básicos da adição e da subtração** e calcular com números inteiros não negativos recorrendo à **representação horizontal do cálculo**, em diferentes situações e usando **diversas estratégias** que mobilizem **relações numéricas** e **propriedades das operações**.

2.º ano
Números e Operações
Adição, subtração, multiplicação e divisão

Reconhecer e memorizar **factos básicos das operações** e calcular com números inteiros não negativos recorrendo à **representação horizontal do cálculo**, em diferentes situações e usando **diversas estratégias** que mobilizem **relações numéricas** e **propriedades das operações**.

Aprendizagens essenciais | Articulação com o perfil dos alunos

1.º ciclo do ensino básico

Resolução de problemas

Comunicação matemática

Raciocínio matemático

Conexões matemáticas

Tarefas

Resolver problemas

Representações

Materiais diversificados

Estratégias de resolução

Procedimentos

Diferentes contextos

Conclusões

Discussão

Confronto de ideias

Aprendizagens significativas para todos os alunos.

O ensino dos números na escolaridade básica: pontos críticos e abordagens

2.º ciclo do ensino básico

$$12 \times \frac{3}{2}$$

Resolução de Eva

$$12 \times \frac{3}{2} = \frac{12 \times 3}{1 \times 2} = \frac{36}{2} = (30+6):2 = 15+3 = 18$$

Resolução de André

$$12 \times \frac{3}{2} = \frac{12 \times 3}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Resolução de Rodrigo

$$\frac{12}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{36}{2} = \frac{18}{1}$$

:2

Cálculos baseados num algoritmo

$$18 : 4 = 4{,}5$$

Professora – Alexandre, queres dizer como é que tu viste que havia quatro vezes e meia? Ele não fez conta.

Alexandre – Quatro vezes quatro é dezasseis. E depois, mais metade de quatro.

Professora – Então, quatro vezes quatro são dezasseis. Do dezasseis para o dezoito falta-me o quê? Falta-me metade do quatro. Por isso, quatro vezes e meia. Está certo. Pronto, por isso ele não fez sequer a conta, fez o cálculo de cabeça.

Episódio de ...

Cálculos baseados nas propriedades dos números e das relações das operações.

Números no 3º ciclo

Pontos críticos e abordagens

Teresa Olga Duarte

- Identificação de frações decimais
- Passagem de dizima infinita periódica para fração
- Operações com notação científica
- Operações com números irracionais
- Aproximações e erros (operações)

Exemplo

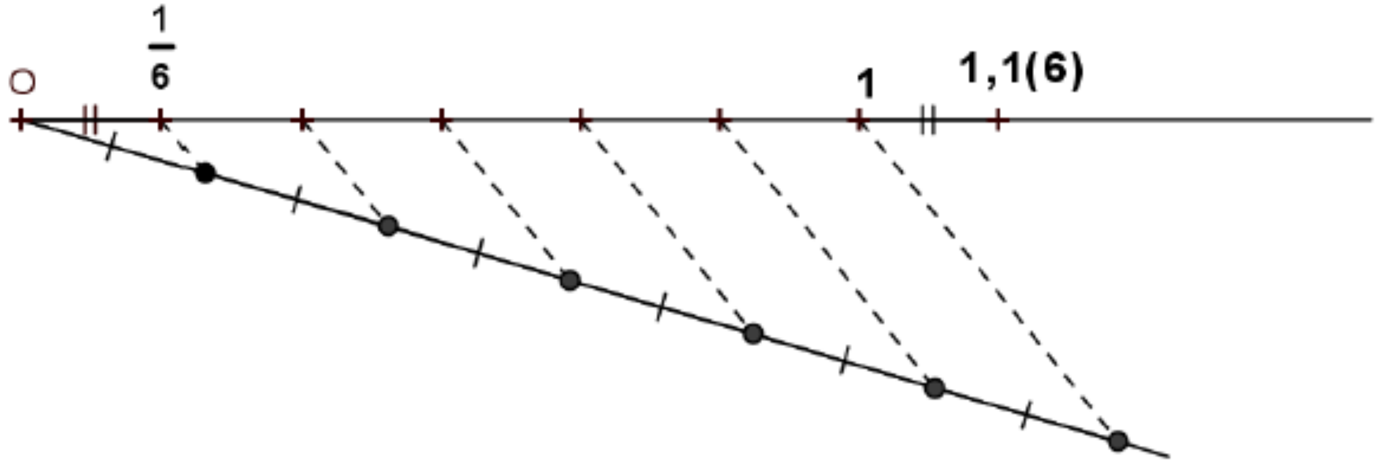
Representa na reta numérica o número racional $1{,}1(6)$ começando por representá-lo na forma de fração e em seguida como numeral misto.

R.: Começamos por representar este número na forma de fração:

$$10 \times 1{,}1(6) - 1{,}1(6) = 11{,}666\ldots - 1{,}166\ldots = 11{,}6 - 1{,}1 = 10{,}5.$$

Desta forma, $9 \times 1{,}1(6) = 10{,}5$ pelo que $1{,}1(6) = \frac{10{,}5}{9} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$.

Representando a fração na forma de numeral misto, tem-se $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.
Para representar o ponto de abcissa $1{,}1(6)$ construímos então um segmento de reta de comprimento $\frac{1}{6}$ e justapomo-lo ao segmento de reta cujas extremidades são representadas pelos números 0 e 1 (ver GM7-4.14).



No quadro está representado um conjunto de números racionais

	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{6}{2}$		$-\frac{7}{4}$	
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$		-0,75
	0	-3	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{2}$	
$-\frac{3}{4}$	- 1,25	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0,5	$2\frac{1}{3}$	

2.1. Indica os números inteiros que estão no quadro. Explica porque os escolheste.

2.2. Tal como os números escritos na forma decimal, os números escritos na forma fraccionária também podem ser representados numa recta numérica.

2.2.1. Constrói uma recta numérica e representa os números inteiros que constam do quadro e os números $\frac{3}{2}$, $-\frac{7}{2}$ e -2,25.

2.2.2. Constrói outra recta numérica e representa os números $\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$; $\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{3}$ e 2,3.

2.3. Indica, sem efectuar cálculos, qual dos números seguintes é maior e explica o teu raciocínio.

2.3.1. $\frac{7}{3}$ ou $\frac{5}{3}$?

2.3.2. $-\frac{7}{4}$ ou $-\frac{3}{4}$?

2.3.3. $\frac{7}{3}$ ou $\frac{7}{4}$?

2.3.4. $\frac{3}{2}$ ou $\frac{5}{3}$?

2.3.5. $-\frac{5}{3}$ ou $-0{,}75$?

2.4. Recorrendo a fracções com o mesmo denominador, indica qual dos números seguintes é maior, $\frac{3}{2}$ ou $\frac{5}{3}$?

Exemplo

Considera os números racionais $\frac{13}{2^2}$, $\frac{3}{5^3}$, $\frac{87}{2^3\times 5}$ e $\frac{121}{40}$.

a. Obtém a respetiva representação em dízima começando por transformar cada uma das frações em frações decimais que lhes sejam equivalentes.

b. Obtém novamente as representações em dízima das frações dadas recorrendo desta vez ao algoritmo da divisão.

R.:

a. $\frac{13}{2^2}=\frac{13\times 5^2}{2^2\times 5^2}=\frac{325}{(2\times 5)^2}=\frac{325}{100}=3{,}25$;

$\frac{3}{5^3}=\frac{3\times 2^3}{5^3\times 2^3}=\frac{24}{(5\times 2)^3}=\frac{24}{10^3}=\frac{24}{1000}=0{,}024$;

$\frac{87}{2^3\times 5}=\frac{87\times 5^2}{2^3\times 5\times 5^2}=\frac{2175}{(5\times 2)^3}=\frac{2175}{1000}=2{,}175$;

Começando por decompor 40 em fatores primos vem $40=2^3\times 5$.

$\frac{121}{40}=\frac{121}{2^3\times 5}=\frac{121\times 5^2}{2^3\times 5^3}=\frac{3025}{(2\times 5)^3}=\frac{3025}{1000}=3{,}025.$

Tarefa 4 – Dízimas

1. Considera os números escritos na forma fraccionária.

$$\frac{3}{8} \qquad -\frac{22}{14} \qquad -\frac{2}{3} \qquad \frac{5}{13}$$

$$\frac{4}{11} \qquad \frac{23}{12} \qquad -\frac{14}{5} \qquad \frac{25}{32}$$

1.1. Usando a calculadora, representa-os na forma de dízima.

1.2. Tendo em conta o tipo de dízima encontrado na alínea anterior, forma dois grupos com esses números:

Grupo 1	Grupo 2
$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$

1.3. Explica o critério que usaste para agrupar os números.

1.4. Para cada um dos números do grupo 2, indica qual o próximo algarismo da dízima que é desconhecido. Para cada caso, explica o teu raciocínio.

Exemplo

Determina um intervalo de extremos racionais e de medida de comprimento inferior ou igual a $\frac{1}{2}$ *que contenha* $\sqrt[3]{5}$.

R.: Enquadrando o número $5 \times 2^3 = 40$ por cubos perfeitos consecutivos:

$$3^3 = 27 < 5 \times 2^3 = 40 \ < 64 = 4^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3 < 3 < \left(\frac{4}{2}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \sqrt[3]{3} < 2 \Leftrightarrow \ \sqrt[3]{3} \in \left]\frac{3}{2} ; 2\right[.$$

Este método permite aproximar qualquer raiz quadrada (respetivamente cúbica) com um erro tão pequeno quanto desejarmos calculando apenas quadrados (respetivamente cubos) de números inteiros. Esses cálculos podem naturalmente ser efetuados com uma calculadora, ou, em alternativa, recorrendo a uma tabela de quadrados (respetivamente cubos) perfeitos.

Um telemóvel custou 320 € mas teve um desconto de 20%. Qual era o preço do telemóvel sem o desconto?

Respostas incorretas obtidas: 256 € ; 1600 €

Aluna: Encontrei vários conjuntos de medidas de capacidade, mas fiquei muito admirada porque nenhuma tinha a medida 2,5 dl que me parece uma medida muito usada.

Professora: Não encontraste? Então, que medidas tens aí?

Aluna: Esta é um litro, esta é meio litro, esta é um quarto de litro ...