

Tarefa 1 – Esfera e planos tangentes

Represente, no mesmo referencial, a esfera de centro $(3,-1,4)$, de raio 2 e os seus planos tangentes, paralelos a yOz .

Proposta de resolução:

Math Deg Fix2 d/c Real $(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$ a: 3, b: -1, c: 4, r: 2 3.00 FACTOR EXPAND EDIT SET	Math Deg Fix2 d/c Real $aX+bY+cZ+d=0$ a: 1, b: 0, c: 0, d: -5 1.00 EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET	Math Deg Fix2 d/c Real $aX+bY+cZ+d=0$ a: 1, b: 0, c: 0, d: -1 1.00 EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET
--	---	---

Math Deg Fix2 d/c Real

Janela-V

Xmin : -1

max : 6

grid : 25

Ymin : -4

max : 2

grid : 25

INITIAL 3D-VMEM

Math Deg Fix2 d/c Real

Janela-V

Ymin : -4

max : 2

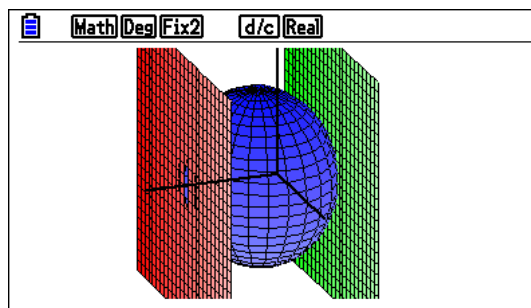
grid : 25

Zmin : 1

max : 7

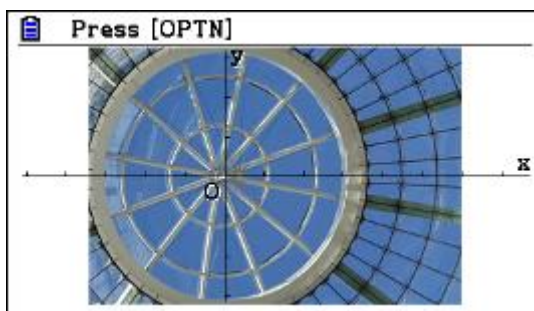
Angleθ : 70

INITIAL 3D-VMEM



Tarefa 2 – Retas

Considere a imagem do Menu Plot Imagem **Glass_~1.g3p**



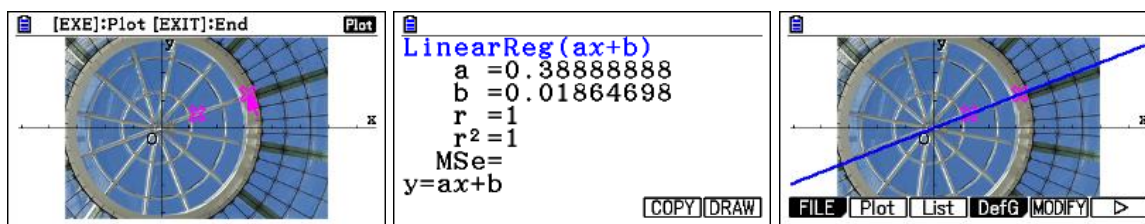
1. Utilizando as potencialidades da sua calculadora e a imagem da sua calculadora, trace e escreva as equações das duas primeiras retas que visualiza no primeiro quadrante.
2. Um ponto P desloca-se sobre a reta de menor declive e um ponto Q desloca-se sobre a outra reta acompanhando o movimento do ponto P, de forma que P e Q tenham sempre abcissas iguais. Designando por a a abcissa do ponto P, determine os valores de a em que a distância entre P e Q seja 2.

Proposta de resolução:

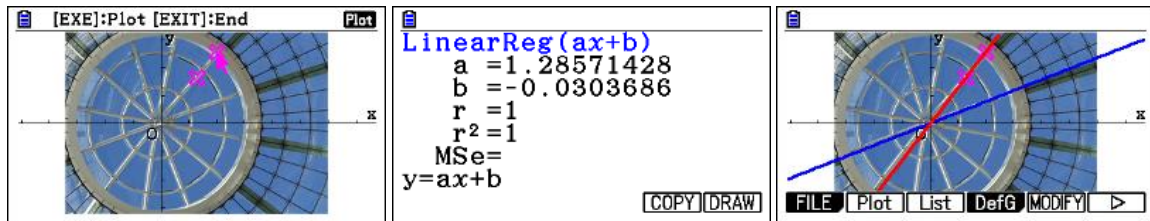
1. No menu **Plot Imagem** abra o ficheiro **Glass_~1.g3p**. Em **OPTN**, **F1(FILE)**, **F1(OPEN)**, na pasta **CASIO**, selecione a pasta **g3p**, procure o ficheiro **Glass_~1.g3p** (para ser mais rápido faça **ALPHA**, **G**-primeira letra do ficheiro) **F1(OPEN)**.

Para marcar os pontos faça **OPTN**, **F2(Plot)** (com as setas do teclado posicione o cursor) sempre que **EXE** marca um ponto. Faça **EXIT** para parar de marcar. Em **F3(List)** pode ver as coordenadas dos pontos marcados.

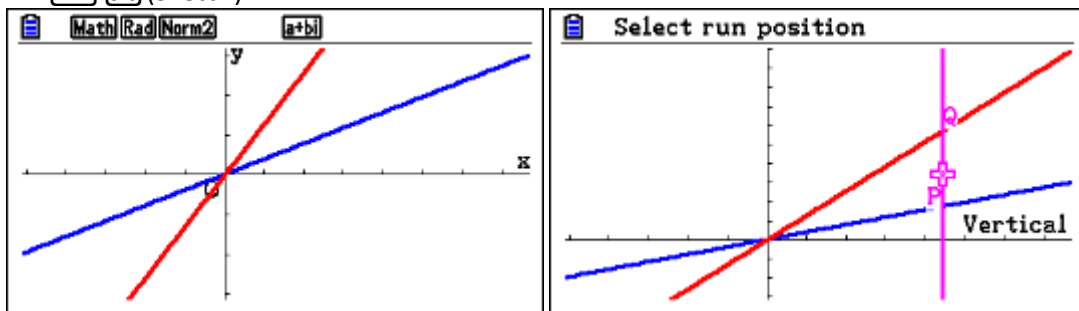
Para calcular a regressão linear, em **OPTN**, procure o submenu **REG**, escolha **F1(x)**, seguido de **F1(ax+b)**, visualiza a expressão analítica da equação da reta, guarde em **Y1**, escolha **F5(COPY)**, **EXE**.



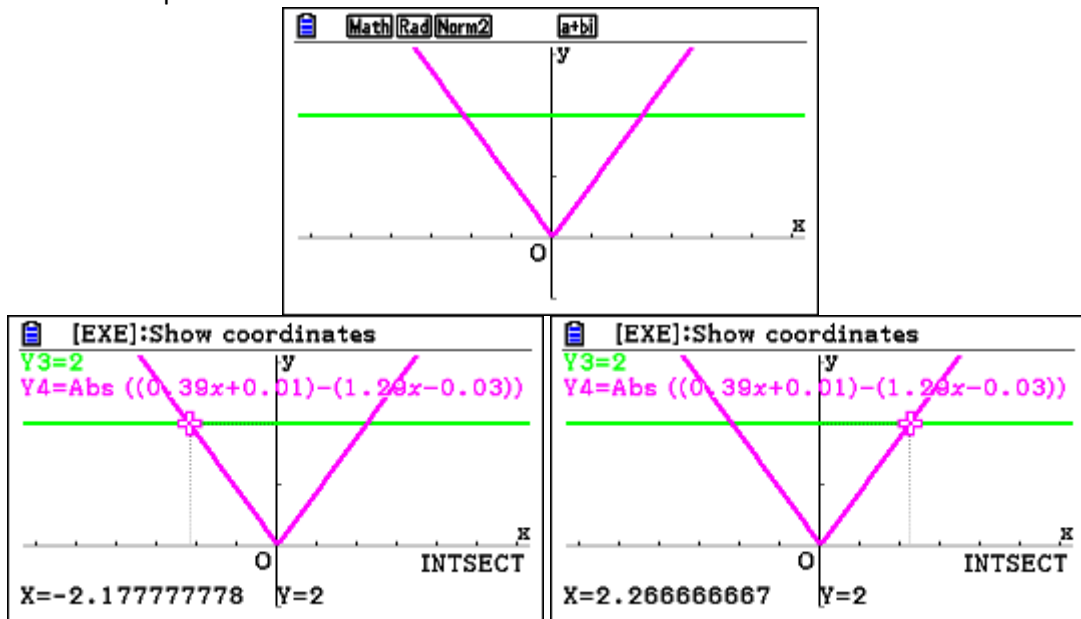
Para encontrar a equação da outra reta, na imagem só podem estar marcados os pontos que vai utilizar para fazer a regressão, assim, apague os pontos desnecessários e proceda de modo análogo, guarde a expressão em **Y2**. **Cuidado**, quando estiver a copiar a equação da reta, caso contrário pode colar por cima da primeira, pois automaticamente vai para Y1. Com as setas do teclado reposicione em Y2.



2. Para responder a esta questão, vamos utilizar o MENU Gráfico e traçar uma reta vertical, de modo a facilitar a interpretação do enunciado. Trace as duas retas, seguido de **[SHIFT] [F4]** (Sketch).



Pretende-se resolver a condição $|(0,39x + 0,01) - (1,29x - 0,03)| = 2$. Em Y3 insira a expressão $|Y1 - Y2|$ e em Y4 insira a expressão 2



R: -2,18 e 2,27

Tarefa 3 – Função Módulo

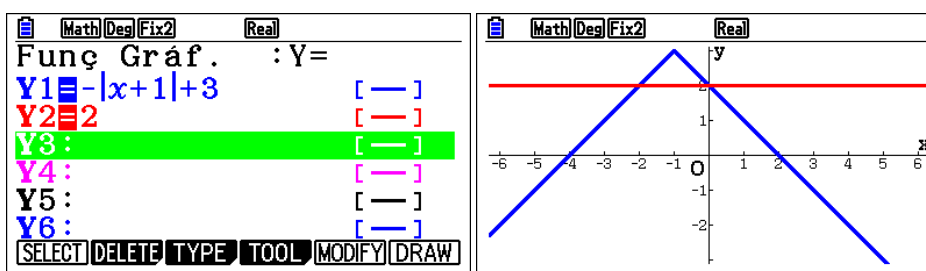
Considere a função j , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $j(x) = -|x + 1| + 3$.

1. Resolva graficamente a inequação $j(x) > 2$.
2. Represente o domínio plano definido pela condição $y > -|x + 1| + 3 \wedge y \leq 2 \wedge x \geq 1$.

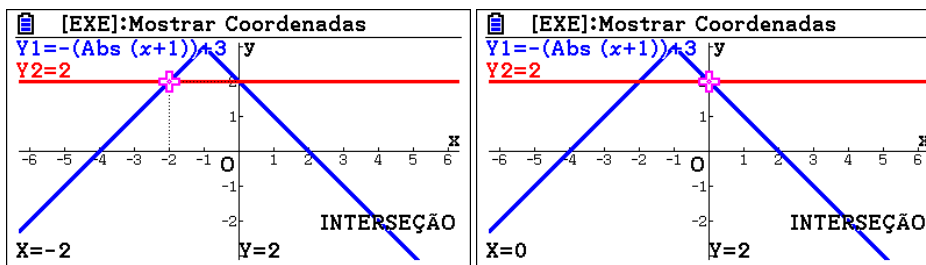
Adaptado da Série de Problemas nº 5 de março de 2010 – GAVE

Proposta de resolução:

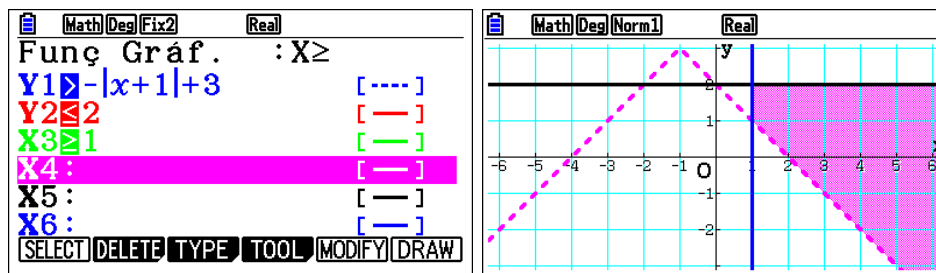
1. Para resolver graficamente a inequação $j(x) > 2$, pode representar-se as funções definidas por $y = j(x)$ e $y = 2$.



As coordenadas dos pontos de interseção podem ser confirmadas, carregando em **[SHIFT]** **[F5]** (G-SOLVE) **[F5]** (INTSECT) **[▶]**. Assim, $j(x) > 2 \Leftrightarrow x \in]-2; 0[$.



2. No ecrã de configuração, **[SHIFT]** **[MENU]** (SET-UP), coloca-se o cursor sobre «Ineq Type» e carrega-se em **[F1]** (Intsect) **[EXE]**. Depois, no editor de funções:
 - com o cursor sobre Y1, carrega-se em **[F3]** (TYPE) **[F5]** (CONVERT) **[F2]** ($y >$);
 - com o cursor sobre Y2, carrega-se em **[F3]** (TYPE) **[F5]** (CONVERT) **[F5]** ($y \leq$);
 - em Y3, carrega-se em **[F3]** (TYPE) **[F6]** ($x \geq$) **[F6]** ($x \geq$) **[F3]** ($x \geq$) **[1]** **[EXE]**.
 Para finalizar, carrega-se em **[F6]** (DRAW)



Tarefa 4 – Números do Mundial

Registaram-se as alturas e a respetiva massa corporal dos jogadores convocados para a seleção Nacional do Mundial de 2014, no Brasil. Obtendo-se a seguinte tabela

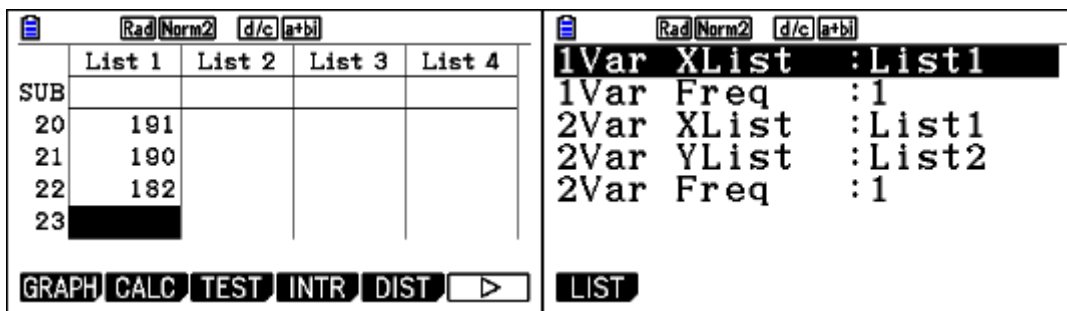
X (cm)	189	182	187	179	188	189	172	186	183	187	170	179	187	180	170	172	179	175	185	191	190	182
Y (kg)	86	81	84	70	81	83	64	75	80	71	61	65	87	78	66	67	79	66	80	86	82	74

<https://www.publico.pt/2014/05/19/desporto/noticia/fichas-dos-convocados-1636624>

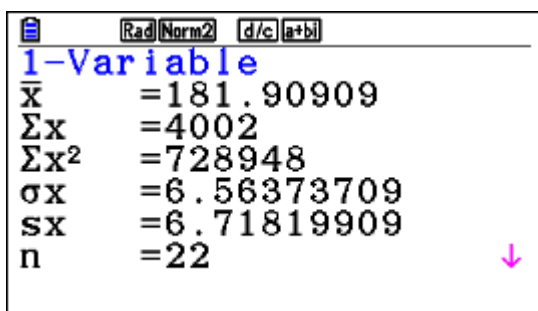
1. Utilizando o Menu Estatística, determine, com arredondamento às centésimas, a média e o desvio padrão populacional relativo às alturas.
2. Ainda relativamente às alturas, represente o diagrama de extremos e quartis e indica os valores dos quartis.
3. Represente o diagrama de dispersão que relaciona as duas variáveis apresentadas (altura e peso) e indique o coeficiente de correlação e a equação da reta de regressão

Proposta de resolução:

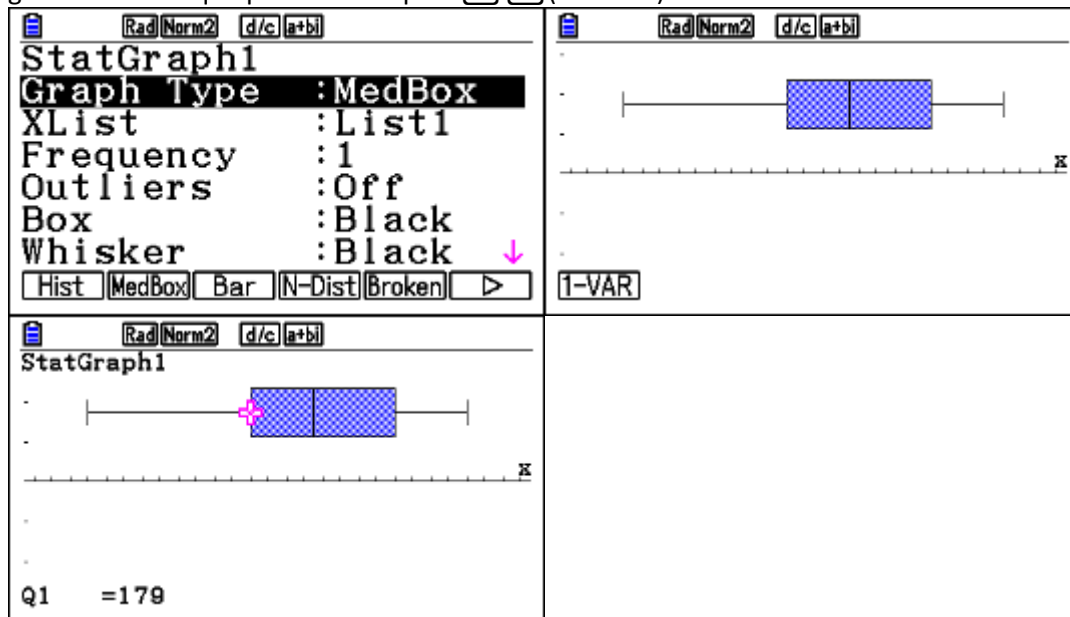
1. No menu Estatística, edite na List 1 os valores relativos às alturas. De seguida, em **F2** (CALC) **F6** (SET) indique 1VarList: List1 (ou a lista onde editou os valores) 1VarFreq:1.



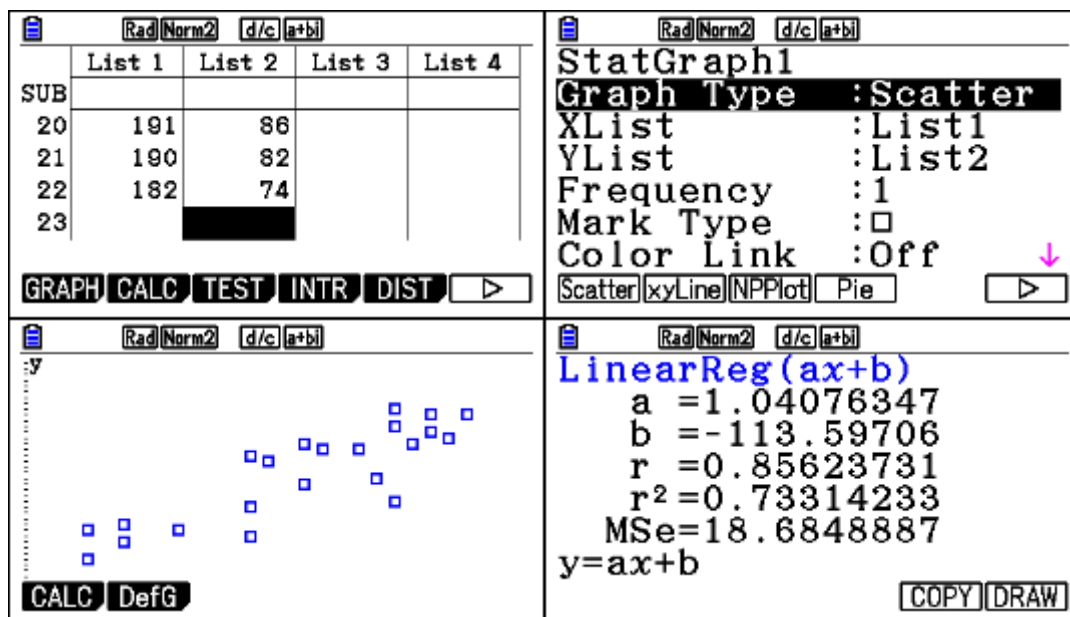
De seguida, **EXE** **F1** (1-VAR)



Para representar o diagrama de extremos e quartis, **[F1]** (GRAPH1) e em **[F6]** (SET) defina o tipo de gráfico e a lista que pretende. Depois **EXE** **[F1]** (GRAPH1)



2.



Para encontrar a equação da reta de regressão, após ter representado o diagrama de dispersão, faça **[F1]** (CALC) **[F2]** **[F1]** (ax+b). Se clicar em DRAW, desenha a reta de regressão. Em COPY, copia a equação da reta obtida para o menu GRAPH.

Tarefa 5 – Trigonometria

1. Considere a função r.v.r. f , definida no intervalo $[0, 2]$ por:

$$f(t) = 3t + \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

Resolva os itens 1.1. e 1.2. recorrendo à calculadora gráfica.

1.1. Existe um ponto A, pertencente ao gráfico de f , cuja ordenada é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de f nesse ponto.

Determine a abscissa de A e o valor do declive da referida reta. Apresente os valores solicitados com aproximação às décimas.

1.2. Considere que f traduz o deslocamento de uma partícula em função do tempo, t . Sabe-se que num intervalo $[a, b]$, com a e b números reais, o valor da velocidade é sempre inferior ao valor da aceleração. Utilizando as capacidades gráficas da calculadora indique os valores de a e b , com duas casas decimais.

Na sua resposta deverá:

- traduzir o problema por uma condição;
- reproduzir num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- indicar os valores de a e b solicitados.

Proposta de resolução:

1.1. Pretende-se resolver a equação

$$f(x) = f'(x)$$

No menu GRAPH (5) escreva em Y1 a expressão da função f .

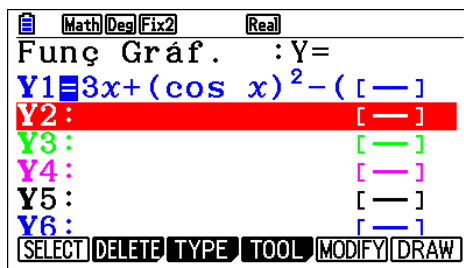
Certifique-se que está a trabalhar no modo radiano (**SHIFT** **MENU**), selecione ANGLE **F2**).

```

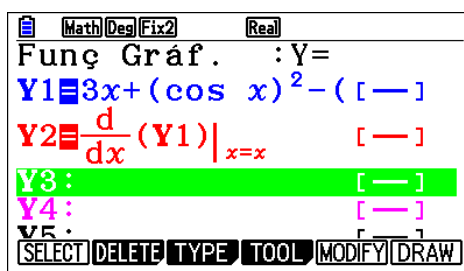
Simul Graph : Off
Derivative   : Off
Background  : None
Plot/LineCol : Green
Sketch Line : Norm
Angle       : Rad
Complex Mode : Real
Deg Rad Gra
  
```

Dado que se pretende encontrar a abscissa de um ponto do gráfico de ordenada igual à derivada nesse ponto, vamos utilizar a opção “derivada de uma função” para obter o gráfico da função f' , função derivada de f .

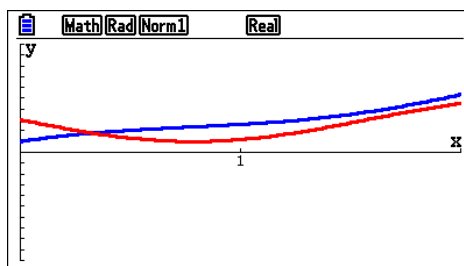
Tecla **OPTN** seguido de **F2** (CALC). Obtém as seguintes opções



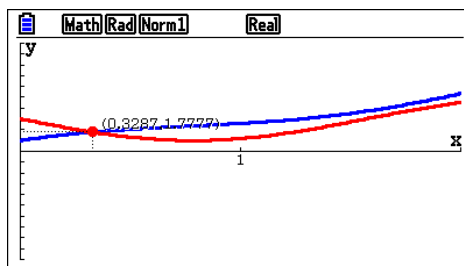
Selecione **F1** (d/dx) e preencha como indicado na imagem:



Obtém os seguintes gráficos:



Determine o ponto de interseção utilizando a tecla **F5** (G-SOLV) **F5** (INTSECT)

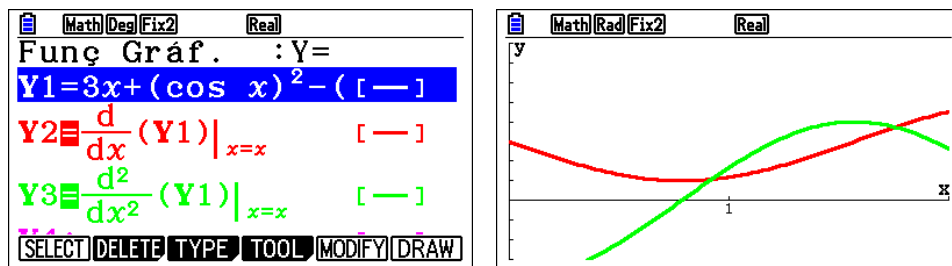


Portanto a abcissa do ponto A é, aprox. 0,3 e o valor do declive nesse ponto é, aprox. 1,8.

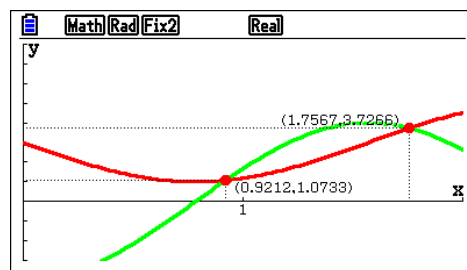
1.2. Pretende-se resolver graficamente a condição

$$f'(x) < f''(x)$$

Introduza em Y3 a segunda derivada de f , f'' ; desselecione Y1 (**F1** (SELECT) para evitar sobreposição de muitos gráficos) e obtenha os gráficos das funções f' e f'' :



Determine os pontos de interseção das duas funções (pontos onde a 1ª e a 2ª derivadas são iguais):



R: $a \approx 0.93$; $b \approx 1.75$

Tarefa 6 – Modelo para o estudo de uma população

O número de animais num jardim zoológico, num certo período de tempo, é dado, t anos após 1 de janeiro de 2000, por $P(t) = \frac{100}{1+\alpha e^{-\beta t}}$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$.

1. Que efeito tem o aumento de β ?

Considere que a função P verifica a condição $P'(t) = \frac{1}{125} P(t)(100 - P(t))$.

2.1. O valor de β é:

- A) 0,1 B) 0,3 C) 2 D) 0,8

2.2. Prove que $\beta=0,8$.

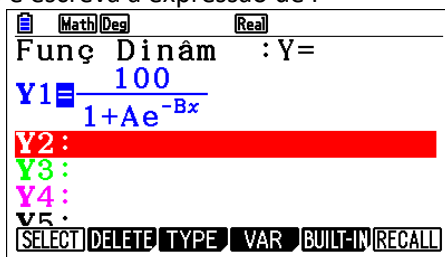
Sabendo agora que a 1 de janeiro de 2000 havia 10 animais.

3. Calcule o valor de α .

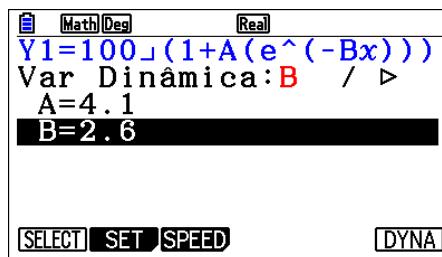
4. Foi administrado um medicamento no instante em que a variação do crescimento do número de animais era máxima. Em que dia e ano foi administrado esse medicamento?

Proposta de resolução: Modelo para o estudo de uma população

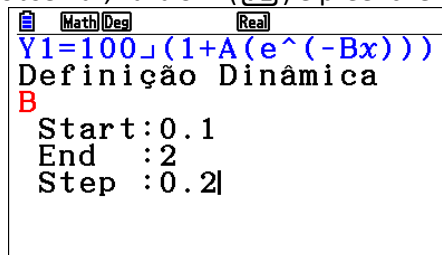
1. Utilize o **MENU** Gráf Dinâm (6) e escreva a expressão de P



Defina que o parâmetro B vai ser animado, em VAR (**F4**), desce para o B com as setas do teclado, **▼**, faça SELECT(**F1**), em cima aparecerá a Var Dinâmica: B .



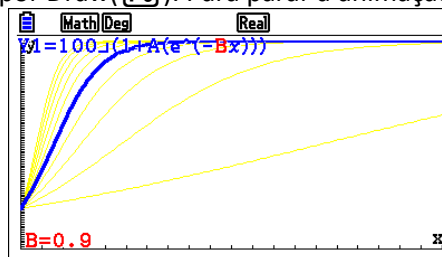
Para definir que valores vamos observar, vai a SET (F2) e preenche de acordo com a imagem



Pode também definir a velocidade em SPEED (F3)

No SET UP, (SHIFT) (MENU), em Locus, escolha On (F1), EXE.

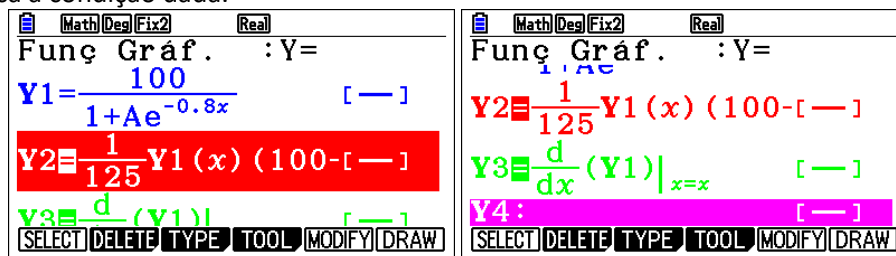
Para visualizar os gráficos opte por Draw (F6). Para parar a animação faça (AC/ON)



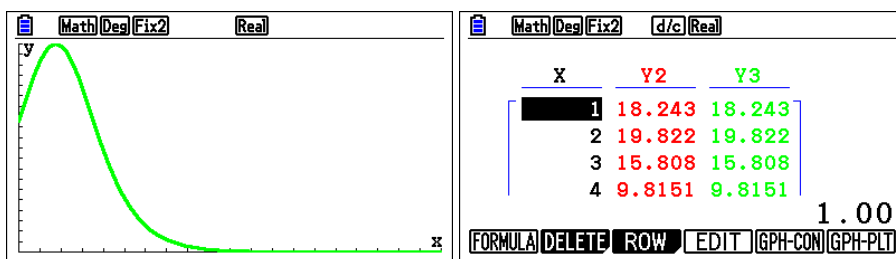
Conclui-se que o fator β traduz-se num aumento da velocidade do crescimento desta população de animais.

2.1. D.

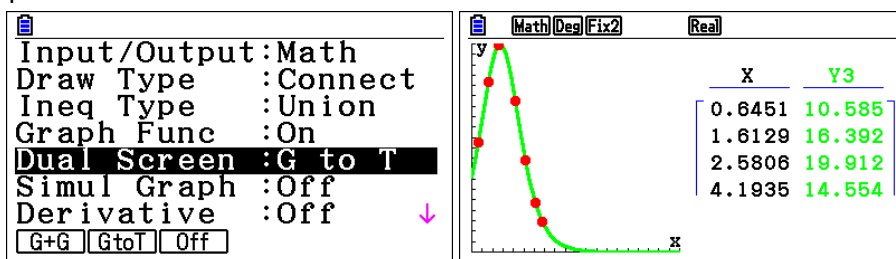
No (MENU) Gráfico (5), em Y1 escreva a expressão de P com os diferentes valores, das diferentes opções, um de cada vez, em $Y2 = \frac{1}{125} Y1(x)(100 - Y1(x))$ e em Y3 a derivada de Y1 e constatará que com $\beta=0.8$, verifica a condição dada.



E constate graficamente e por observação dos valores na tabela que são iguais



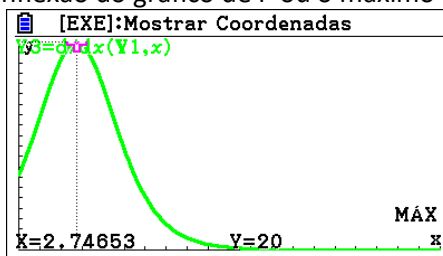
Se preferir pode visualizar o gráfico e a tabela em simultâneo, SET UP, **[SHIFT]** **[MENU]**, em Dual Screen escolha G to T



2.2. Para provar analiticamente que $\beta=0,8$, deriva-se a função P e iguala-se à expressão $\frac{1}{125}P(t)(100 - P(t))$ obtendo uma equação, que resolve em ordem a β .

3. Sabe-se que $P(0) = 10$, substituindo na função P obtém-se a equação $\frac{100}{1+\alpha} = 10$, por equivalências obtém-se $\alpha = 9$.

4. Queremos saber o ponto de inflexão do gráfico de P ou o máximo da derivada de P.



$0,74653 \times 365 \approx 272$

Assim se conclui que o medicamento foi administrado a 30 de setembro de 2002.

Tarefa 7– Função por ramos

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1. Represente a função f graficamente.
2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$.
Estude a função g quanto à existência de extremos relativos em $]0; e]$.
3. Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g . Sabe-se que:
 - A é o ponto de coordenadas $(2; 0)$;
 - B é o ponto de coordenadas $(5; 0)$;
 - P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g .

Para cada posição do ponto P , considere o triângulo $[ABP]$.

Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1.

Apresenta os valores com arredondamento às centésimas.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática A, 1ª fase, 2013

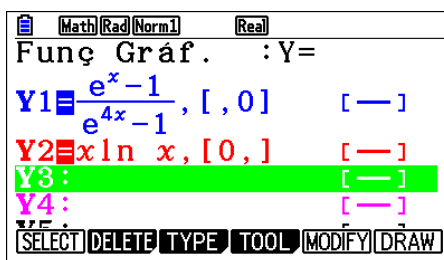
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. **MENU** **5** (Gráfico)

No editor de funções, escreve-se o primeiro ramo da função f em Y1 e o segundo ramo em Y2.

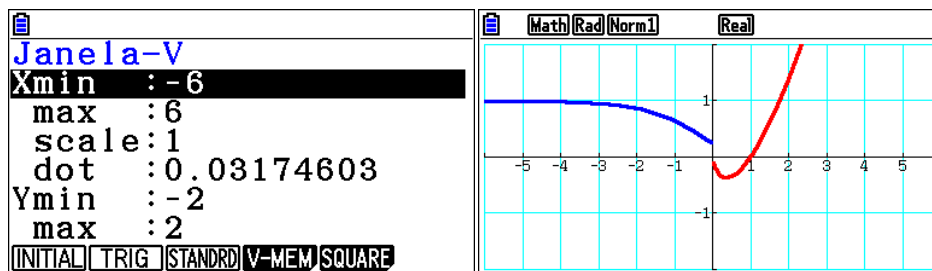
Assim, em Y1, escreve-se a expressão « $\frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1}$ », seguida de « $[, 0]$ » e carrega-se em **EXE**.

De seguida, em Y2, escreve-se « $x \ln x$ », seguido de « $[0;]$ » e carrega-se em **EXE**.

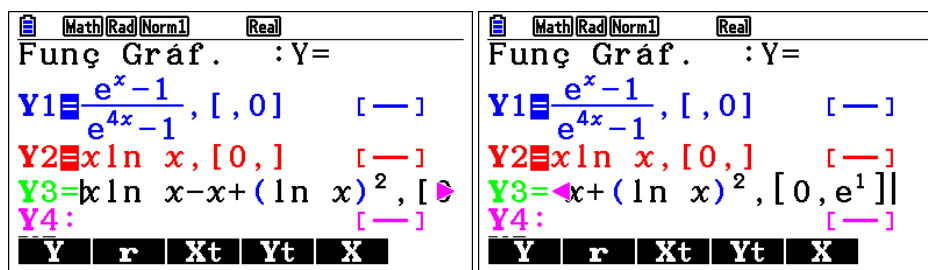


De seguida, pressiona-se **SHIFT** **F3** (V-WIN) para configurar a janela de visualização. Pode escolher-se, por exemplo, a janela $[-6; 6] \times [-2; 2]$.

Por fim, no editor de funções, pressiona-se **F6** (DRAW).

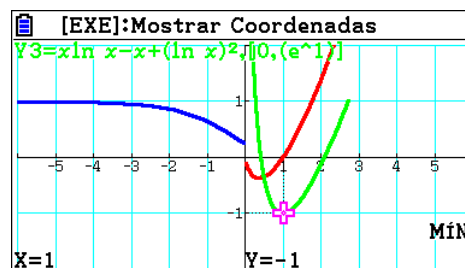


2. No editor de funções, escreve-se a expressão analítica da função g em Y3: « $x \ln x - x + (\ln x)^2$ ». Visto que a procura de extremos relativos é limitada ao intervalo $]0; e]$, pode acrescentar-se a restrição « $[0, e^1]$ » e, por fim, carregar em **[EXE]**.

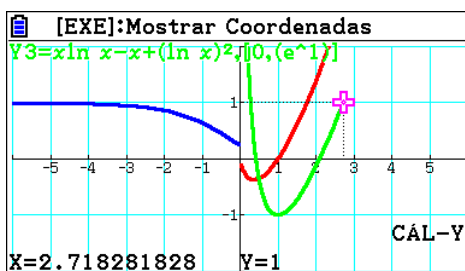


Após traçar o gráfico da função g , observa-se que tem um mínimo e um máximo.

Relativamente ao mínimo, carrega-se em **[SHIFT]** **[F5]** (G-SOLV) **[F3]** (MIN) e selecciona-se Y3 (**[▼]** **[▼]** **[EXE]**) Conclui-se que o mínimo relativo é -1 .



Em relação ao máximo relativo, é atingido para $x = e$. Assim, carrega-se em **[SHIFT]** **[F5]** (G-SOLV) **[F6]** (**[>]**) **[F1]** (Y-CAL), selecciona-se Y3, introduz-se o valor e^1 e pressiona-se **[EXE]**. Conclui-se que o máximo relativo é 1 .



3. Para começar, no editor de funções, pode desativar-se a função f .

Para escolher uma janela de visualização mais adequada, pode recorrer-se ao Zoom BOX: **[SHIFT]** **[F2]** (ZOOM) **[F1]** (BOX) (figura 1). Coloca-se o cursor no local onde ficará o vértice superior esquerdo do retângulo de visualização (figura 2) e carrega-se em **[EXE]**. A seguir, desloca-se o cursor para baixo e para a direita (figura 3). Por fim, carrega-se em **[EXE]** (figura 4).

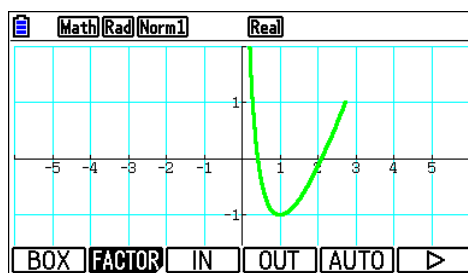


Figura 1

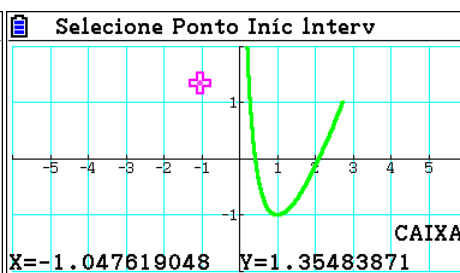


Figura 2

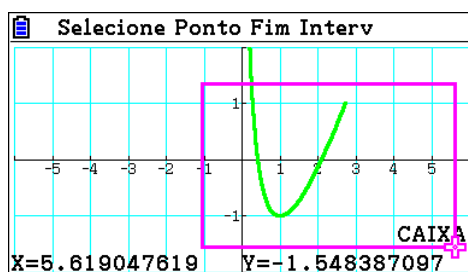


Figura 3

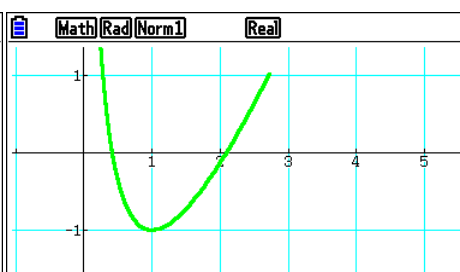


Figura 4

Pretende-se que a área do triângulo $[ABP]$ seja igual a 1.

Uma vez que a base $[AB]$ do triângulo tem 3 unidades, é necessário que a altura seja igual a $\frac{2}{3}$.

Assim, procuram-se as abcissas dos pontos P tais que $y_P = \frac{2}{3}$ ou $y_P = -\frac{2}{3}$.

Carrega-se em **[SHIFT]** **[F5]** (G-SOLV) **[F6]** ($\triangleright$) **[F2]** (X-CAL) e introduz-se o primeiro valor. Para marcar o ponto no gráfico, com as respetivas coordenadas, carrega-se em **[EXE]** (figura 5). Para obter o ponto seguinte, carrega-se em **[▶]** e pressiona-se novamente **[EXE]** (figura 6).

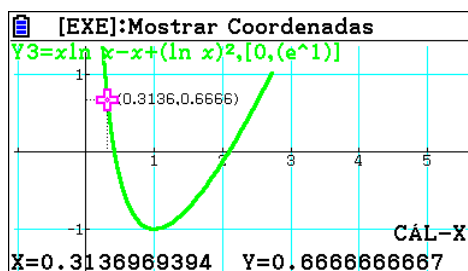


Figura 5

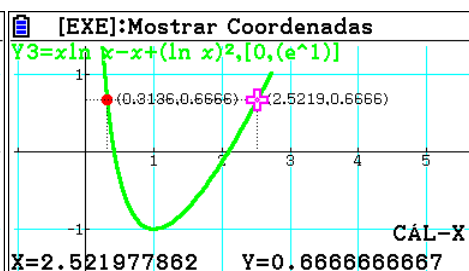
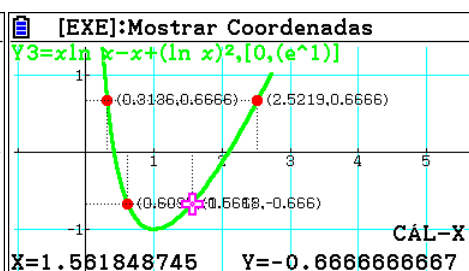
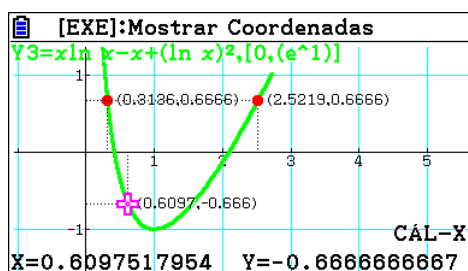


Figura 6

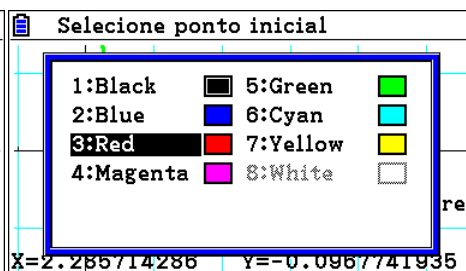
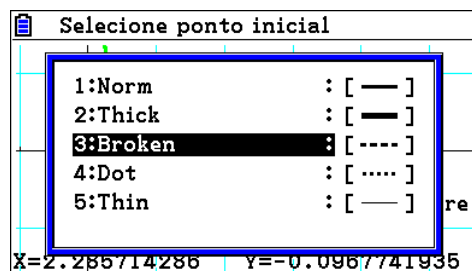
Seguidamente, repete-se o processo com o valor $-\frac{2}{3}$.



Conclui-se que $x_p \approx 0,31$ V $x_p \approx 0,61$ V $x_p \approx 1,56$ V $x_p \approx 2,52$.

Nota: É possível representar os quatro triângulos que verificam a condição $A_{[ABP]} = 1$.

Primeiro, carrega-se em **[SHIFT]** **[F4]** (SKETCH) **[F6]** ($\triangleright$) **[F2]** (LINE) **[F2]** (F-LINE). Uma vez que o tipo de linha em modo *Sketch* é idêntico ao do gráfico (contínuo e verde), é preferível alterá-lo carregando em **[SHIFT]** **[5]** (FORMAT).



Para traçar cada lado, coloca-se o cursor sobre o ponto inicial e carrega-se em **[EXE]**. Depois, desloca-se o cursor até ao ponto final e pressiona-se **[EXE]**.

