



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Antecipar estratégias e dificuldades na resolução de problemas matemáticos

Letícia Gabriela Martins | LGB.martins@hotmail.com

julho, 2019

Programa
11
12
13 julho

XXXV
SIEM
10.11 julho

Castelo Branco
2019

Escola
Secundária
Amato Lusitano

APM
Associação de Professores
de Matemática

O QUE É UM PROBLEMA?



Tarefa que se pretende resolver, mas para a qual não se sabe um método prévio de resolução.

Processo de descoberta de um caminho, previamente desconhecido, para alcançar um determinado fim que está bem definido.

Um cliente comprou num dia 2,3 metros de fazenda. No dia seguinte, comprou mais 1,5 metros da mesma fazenda. Quantos metros de fazenda comprou no total?

O QUE É UM PROBLEMA?



Tarefa que se pretende resolver, mas para a qual não se sabe um método prévio de resolução.

Processo de descoberta de um caminho, previamente desconhecido, para alcançar um determinado fim que está bem definido.

O João tem metade da idade do pai. Sabendo-se que a soma das duas idades é 72, quantos anos tem o João?

PLANEAR UMA AULA



Trabalho individual

Trabalho em grupo

Discussão em grupo turma

Diagrama esquemático das cinco práticas facilitadoras de uma discussão em torno de tarefas matemáticas (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008, p. 322)

OBJETIVO DA SESSÃO



Antecipação

Antecipar dúvidas e dificuldades que podem surgir na sala de aula e possíveis estratégias para resolver o problema

PROBLEMA DO SAPO



Um sapo está no fundo de um poço com 10 metros de profundidade. Durante o dia, o sapo sobe 4 metros através da parede do poço, mas, durante a noite, e enquanto dorme, escorrega e desce 2 metros. Desta forma, quantos dias levará o sapo a atingir o cimo do poço?

*Retirado de Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IEE.

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

$h \downarrow$

$m = \text{dia} \quad (10 - 4m) + 2m$

dia 1 $\rightarrow (10 - 4 \times 1) + 2 \times 1 = 8 \rightarrow$ falta 8 m para chegar ao topo

dia 2 $\rightarrow (10 - 4 \times 2) + 2 \times 2 = 6 \rightarrow$ " 6 m " " "

dia 3 $\rightarrow (10 - 4 \times 3) + 2 \times 3 = 4 \rightarrow$ " 4 m " " "

dia 4 $\rightarrow (10 - 4 \times 4) + 2 \times 4 = 2 \rightarrow$ " 2 m " " "

dia 5 $\rightarrow (10 - 4 \times 5) + 2 \times 5 = 0 \rightarrow$ " 0 m " " "

R: O sapo chegou ao topo ao fim de 5 dias.

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

①
$$\begin{cases} u_1 = 4 - 2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 - 2 \end{cases}$$

$$u_1 = 4 - 2 = 2$$
$$u_2 = u_1 + 4 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$
$$u_3 = u_2 + 4 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$$
$$u_4 = u_3 + 4 - 2 = 6 + 4 - 2 = 8$$
$$u_5 = u_4 + 4 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$$

R: O sapo levará 10 dias a atingir o topo do poço

A nível de persistência

A nível de interpretação

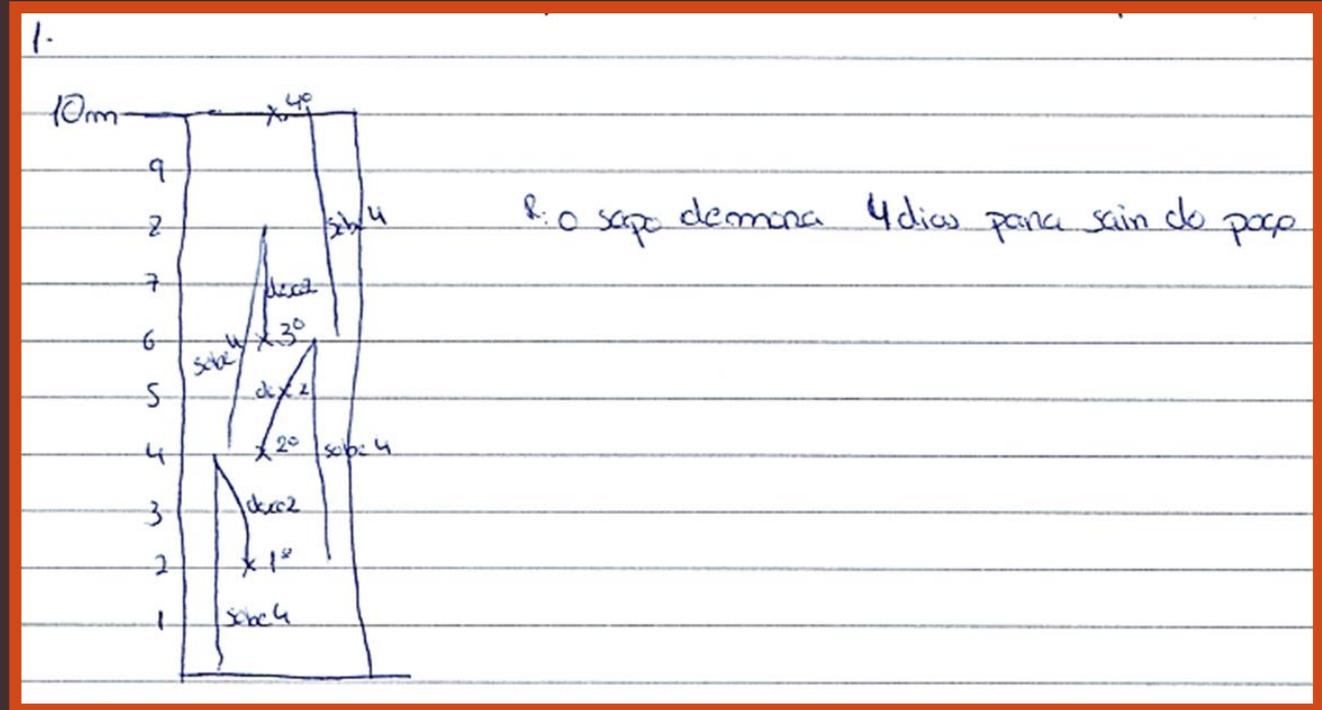
A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)



A nível de persistência

A nível de interpretação

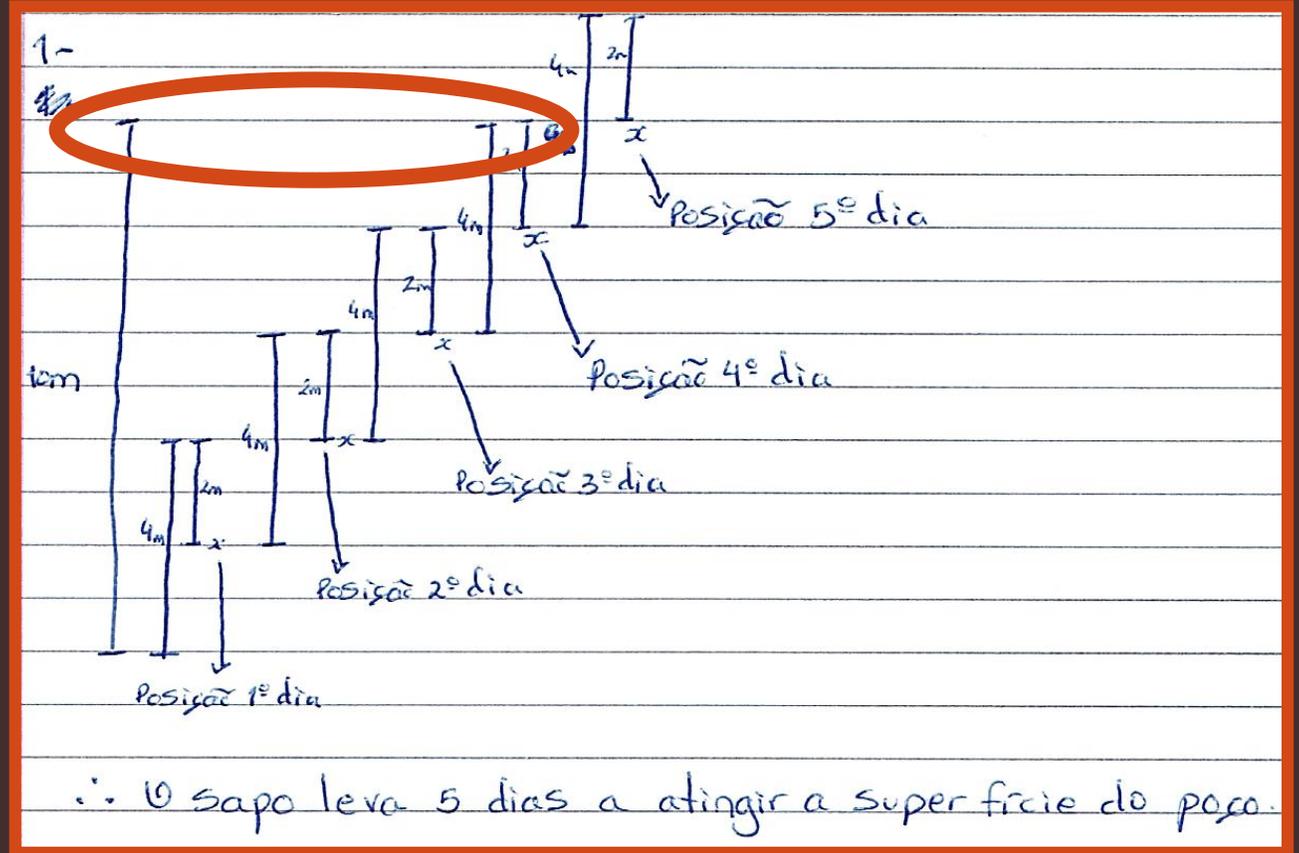
A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)



A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

1º dia
4 metros sobe
desce 2 metros
↓
2 metros que sobiu naquele dia

2º dia
4 metros sobe
desce 2 metros
↓
2 metros que sobiu no 2º dia

3º dia
4 metros sobe
desce 2 metros
↓
2 metros que sobiu no 3º dia

4º dia
4 metros que sobe e desce ao mesmo do pogo. 2 metros que sobe

6m

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

	Dia	Noite
A) 1º Dia	$0 + 4 = 4$	$4 - 2 = 2$
2º Dia	$2 + 4 = 6$	$6 - 2 = 4$
3º Dia	$4 + 4 = 8$	$8 - 2 = 6$
4º Dia	$6 + 4 = \overline{10}$	

B: O sapo levará ~~10~~ 4 dias a atingir o ~~fundo~~ cimo do poço.

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

1

10m
4m
2m

1 dia = 24 horas

Num dia ele apenas sobe 2 metros.

1 dia — 2m

x — 10m

$x = \frac{10 - 4}{2} = 5 \text{ dias}$

R: Para atingir o topo do poço demorará 5 dias.

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DO SAPO



Estratégias	Número de alunos
Resolução por partes	3 alunos (14%)
Construção de esquemas/figuras	9 alunos (41%)
Construção de um modelo	9 alunos (41%)
Construção de tabelas	2 alunos (9%)
Aplicação de fórmulas	4 alunos (18%)

①

poço = 10 m

6m 24h → sobe 4m = 2m = 2m

10 m 2m No entanto, ao terceiro dia, terá subido,
0 5 após também a descida, 6 m, pelo que
 ao 4º dia atingirá os 10 m de altura.

R: Levou 4 dias a atingir o topo do poço.

A nível de persistência

A nível de interpretação

A nível de seleção de informação

A nível de estratégia

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



Estávamos oito pessoas na sala. O Gilberto cumprimentou toda a gente. A Isabel cumprimentou seis pessoas e a Beta cinco. A Gui cumprimentou quatro e o Manuel três. O Rogério cumprimentou duas pessoas e a Alcina, apenas uma. Quem é que eu cumprimentei?

O cumprimento
é uma ação
recíproca entre
duas pessoas?

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



G → I; B, G, M, R, A, "Eu" → 7 pessoas

I → B; G, M, R, A, "Eu" → 6

B → G, M, R, A, "Eu" → 5

G → M, R, A, "Eu" → 4

M → R, A, "Eu" → 3

R → A, "Eu" → 2

A → "Eu" → 1

7x "Eu"

R.: O "Eu" quando é cumprimentado também cumprimenta, portanto visto que estão 8 pessoas na sala, mas nenhum deles se cumprimenta a si próprio o "Eu" acaba por cumprimentar 7 pessoas.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



- 3.
- 1 Gilberto → 8
 - 2 Isabel → 6
 - 3 Beta → 5
 - 4 Gui → 4
 - 5 Manuel → 3
 - 6 Rogério → 2
 - 7 Alcina → 1
 8. Eu

R: Eu não cumprimentei nenhuma, segundo o meu raciocínio todos os outros é quem me cumprimentaram, fui a primeira a chegar à sala.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



	G ^o	I	B	G ²	M	R	A	E
G ^o	X	X	X	X	X	X	X	X
I	X	X	X	X	X	X	X	X
B	X	X	X	X	X	X	X	X
G ²	X	X	X	X	X	X	X	X
M	X	X	X	X	X	X	X	X
R	X	X	X	X	X	X	X	X
A	X	X	X	X	X	X	X	X
E	X	X	X	X	X	X	X	X

R: Ao ser cumprimentado por todos, E cumprimenta todos ~~os~~ também. Na verdade toda a gente acabou por cumprimentar toda a gente. E não toma a iniciativa de cumprimentar ninguém ^{depois} porque ~~sendo~~ sendo o último, foi já cumprimentado por todos.

R: Ao ser cumprimentado por todos, E cumprimenta todos também. Na verdade toda a gente acabou por cumprimentar toda a gente. E não toma a iniciativa de cumprimentar ninguém ^{depois} porque ~~sendo~~ sendo o último, foi já cumprimentado por todos.

Por exemplo, o Gilberto, ao cumprimentar toda a gente, fez com que, depois os outros não tenham que o cumprimentar a ele. Se tal acontecesse, estar-se-iam a cumprimentar pela segunda vez.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



③

Gilberto, Isabel, Beta e Gui.

8 Gilberto = 1 1 1 1 1 1 1 1 ✓ eu = 1 1 1 1 ✓
6 Isabel = 1 1 1 1 1 1 ✓
5 a Beta = 1 1 1 1 1 ✓
4 Gui = 1 1 1 1 ✓
3 ~~Regério~~ Monu = 1 1 1 x
2 Adr Rogerio = 1 1 x
1 Alcinos = 1 ✓

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



Gilberto | I | B | G | M | R | A | E | → 7

Isabel | G | B | G | M | R | E | → 6

Beta | G | I | G | M | E | → 5

Gui | G | I | B | E | → 4

Manuel | G | J | B | → 3

Rogério | G | I | → 2

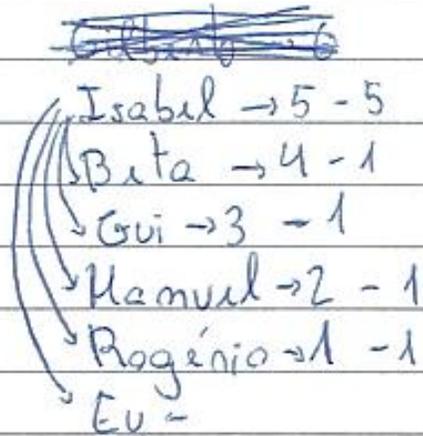
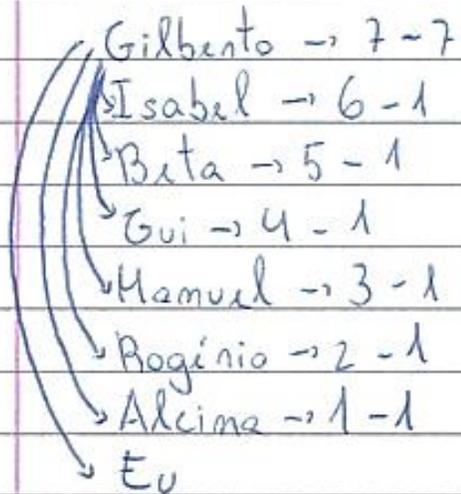
Aleina | G | → 1

∴ Eu cumprimentei o Gilberto, a Isabel, a Beta e a Gui.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS

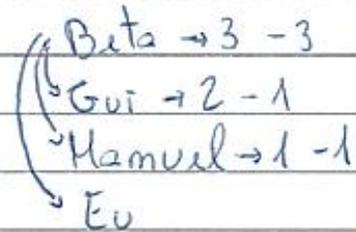


③ 8 pessoas

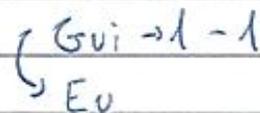


Cumprimentei o Gilberto.
Não cumprimentei a Alcima.

Cumprimentei a Isabel
Não cumprimentei o Rogénio.



Cumprimentei a Beta
Não cumprimentei o Manuel



Cumprimentei o Gui

R: Cumprimentei o Gilberto, a Isabel, a Beta e o Gui

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



⊗ Gilberto — Toda a gente

Eu — Gilberto
Isabel
Beta
Gui

Mamuel ⊗ — Gilberto
Isabel
Beta

Rogénio — Gilberto
Isabel

Isabel — Gilberto
Eu
Gui
Mamuel
Rogénio
Beta

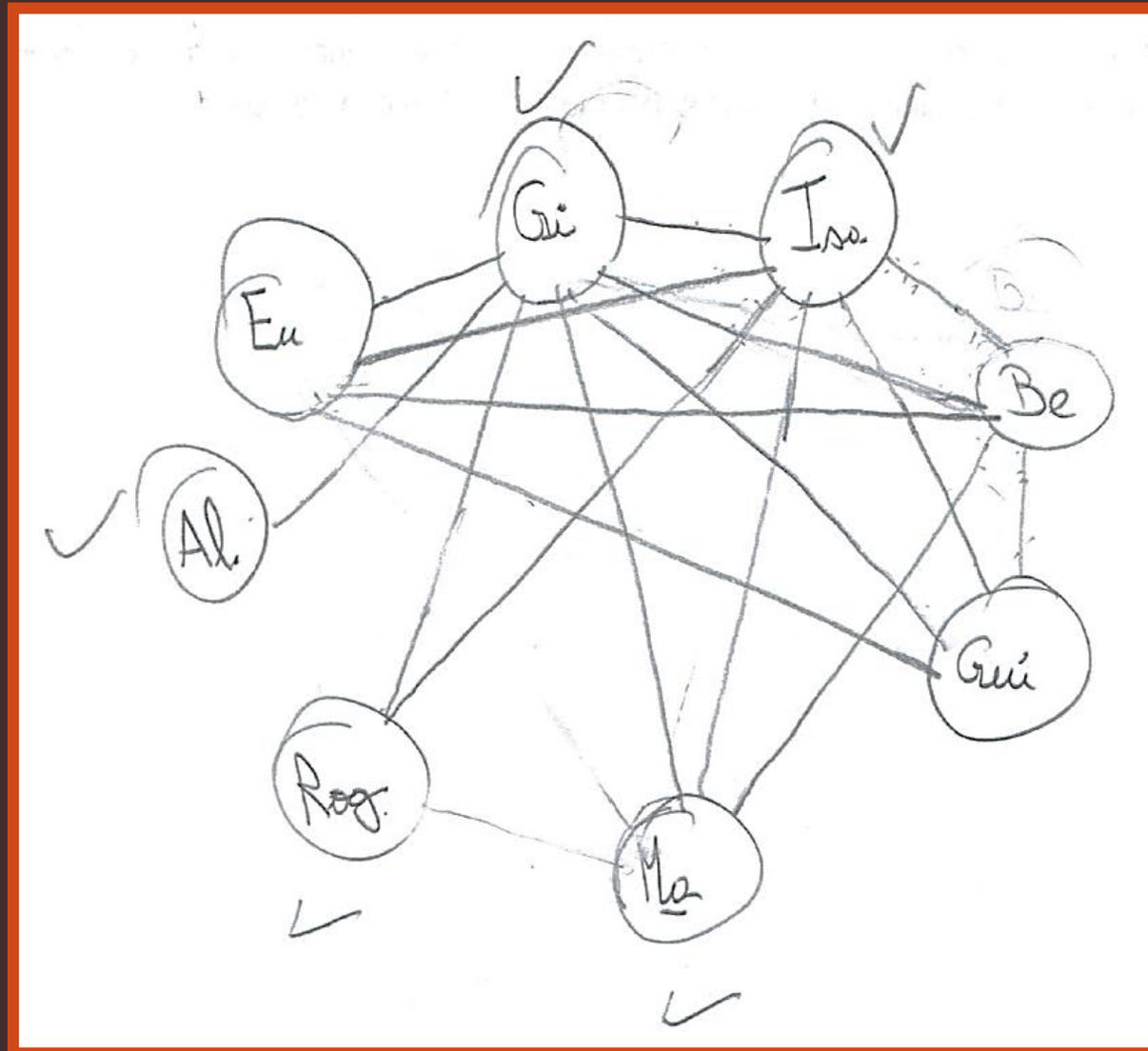
Alcina — Gilberto

Beta — Gilberto
Isabel
Eu
Gui
Mamuel

Gui — Gilberto
Isabel
~~Isabel~~ Beta
Eu

R: Eu cumprimentarei o Gilberto, a Isabel, a Beta e a Gui.

PROBLEMA DOS CUMPRIMENTOS



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

“Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.”

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?
2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

* Adaptado de Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2013). Cortes na piza (ensino secundário) – caso multimédia. In Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática. Disponível em: <http://p3m.ie.ul.pt/caso-4-cortes-na-piza-ensino-secundario>

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

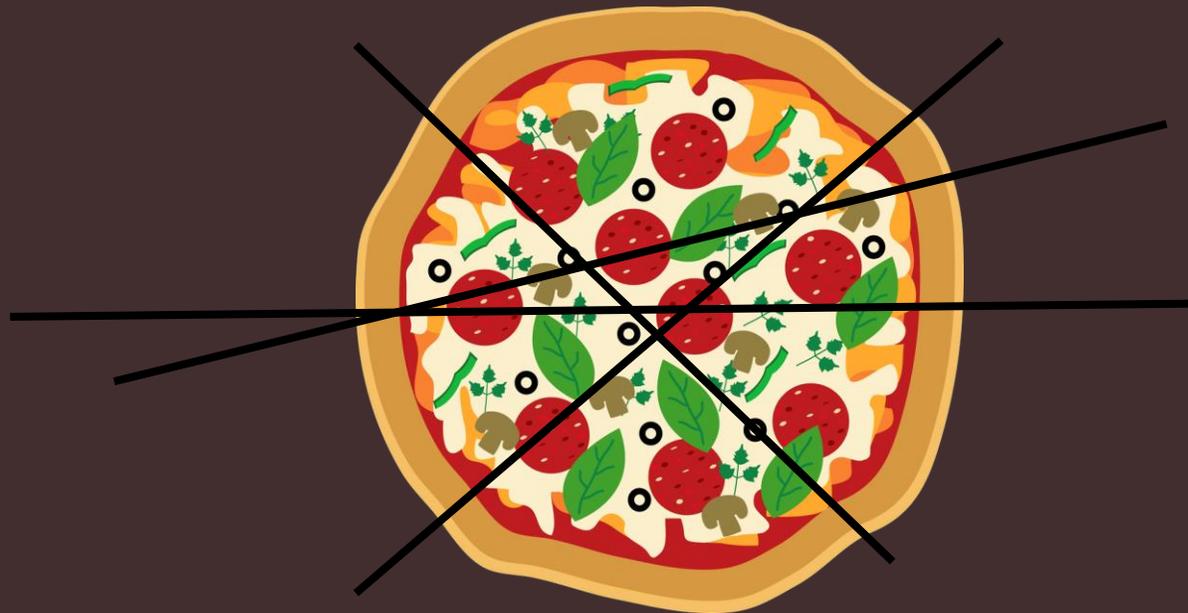


Numa pizzeria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

“Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.”

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?
2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Antecipação



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

“Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.”

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?
2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Antecipação

Estratégia: construção de figuras conjugada com a tentativa e erro até se aperceberem da existência de um padrão

Dificuldades: cortes que passam no centro da pizza

Discussão: apresentação feita por ordem crescente de resultados

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

“Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.”

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?
2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Monitorização

30 minutos inicialmente estabelecidos → 50 minutos

“as fatias têm de ter a mesma forma geométrica?”

“as fatias têm de ser triangulares?”

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Numa pizzeria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

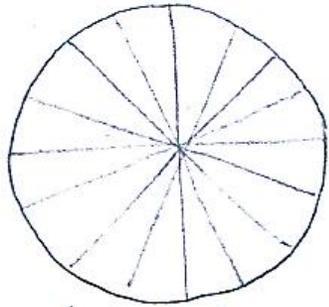
“Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.”

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?
2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Seleção

Sequenciação

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



$$1 \rightarrow 16$$

$$2 \rightarrow \underline{2n}$$

$$8 \text{ cortes} \rightarrow 16 \text{ fatias}$$

$$9 \text{ cortes} \rightarrow 18 \text{ fatias}$$

$$10 \text{ cortes} \rightarrow 20 \text{ cortes}$$

$$n \text{ cortes} \rightarrow 2n \text{ cortes}$$

△ isto tudo
caso as fatias
sejam setores
circulares.

$$n \rightarrow +\infty$$

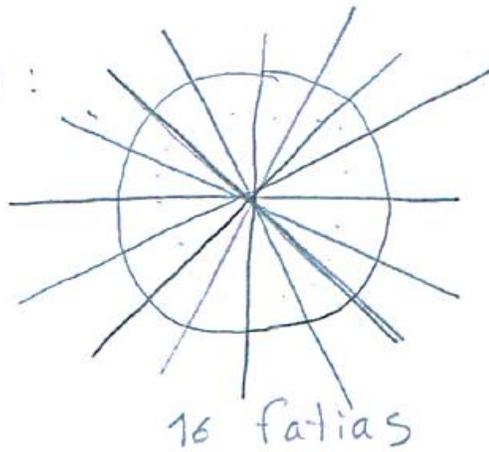
$$2 \times \infty = +\infty$$

∴ visto que ^{se} \checkmark obtem sempre o dobro ^{do n} \checkmark dos cortes
em fatias então n sendo o numero de cortes
 $2n$ sera o numero fatias.

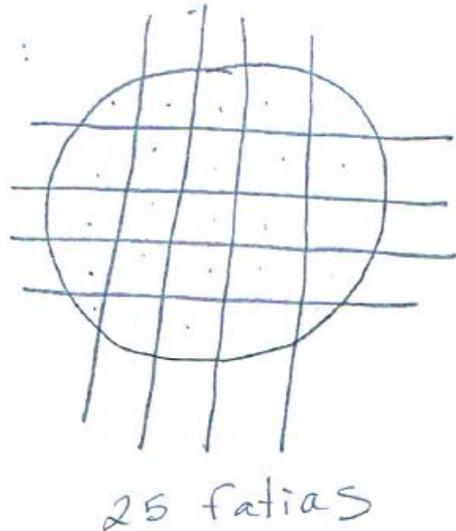
PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

1- Por tentativa / erro:

1ª Resolução:



2ª Resolução:

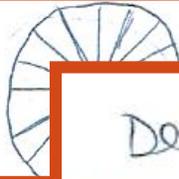


Inicialmente, pensamos em cortar as fatias de forma habitual sendo cada fatia um setor circular e obtemos 16 fatias. Depois pensamos em fazer cortes na horizontal e na vertical o que nos deu um total de 25 fatias. Pensamos, portanto que com 8 cortes conseguimos obter um número máximo de fatias, 25 fatias

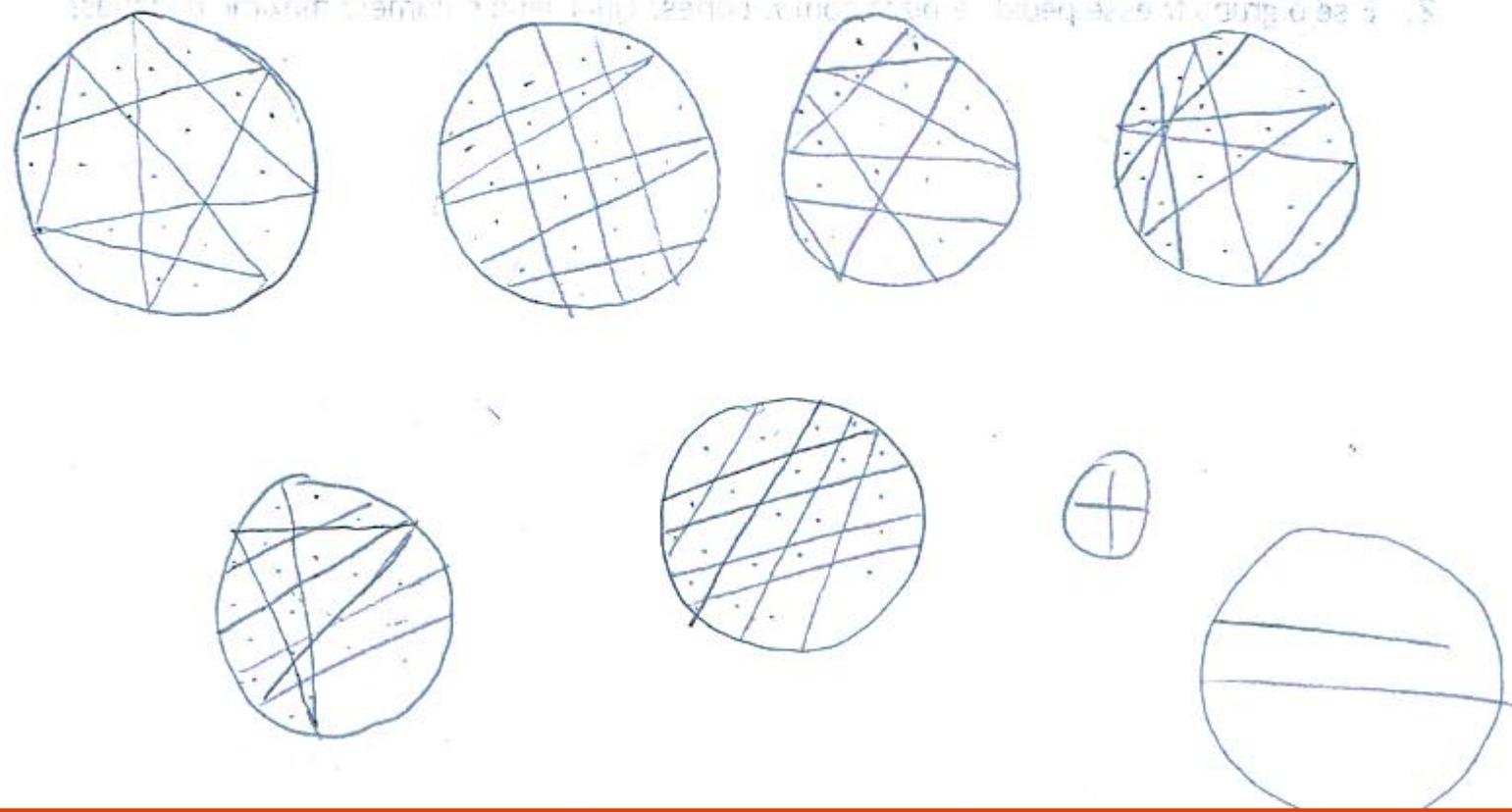
PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Se cortarmos a pizza sempre em metades



Depois tentamos outras maneiras aleatorias, nunca a tentativa de encontrar um esquema de forma a que o nr de fatias fosse maior que 25



1-
 → x ma
 x ma
 → x m
 x m
 → x m
 x m
 16 → 2
 ↵
 horizontal e ma
 fatias, sendo p
 → x ma horizo
 x ma vertica

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



①

16 fatias

25 fatias

28 fatias

The diagram shows three different ways to cut a circular pizza. The first diagram shows 16 radial cuts from the center to the edge, creating 16 slices. The second diagram shows 5 vertical cuts and 5 horizontal cuts, creating a grid of 25 slices. The third diagram shows 8 radial cuts and 2 diagonal cuts, creating 28 slices. Each diagram is a hand-drawn sketch in blue ink on a white background.

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Handwritten notes on a white background with an orange border:

- 1 ⇒ 2
- 2 ⇒ 4
- 3 ⇒ 7
- 4 ⇒ 11
- 5 ⇒ 18
- 6 ⇒ 29
- 7 ⇒ 47
- 8 ⇒ 82



A22: Olha aí... de 2 para 4 vão dois, de 4 para 7 vão três, de 7 para 11 vão quatro... depois, no quinto, vão ter 11+5, o sexto vai ter essa soma mais 6...

A14: Deixa-me ver se vão cinco, realmente... [fazem o corte, começam a contar, e chegam a 15 fatias]. Provavelmente haverá alguma maneira de dar 16...

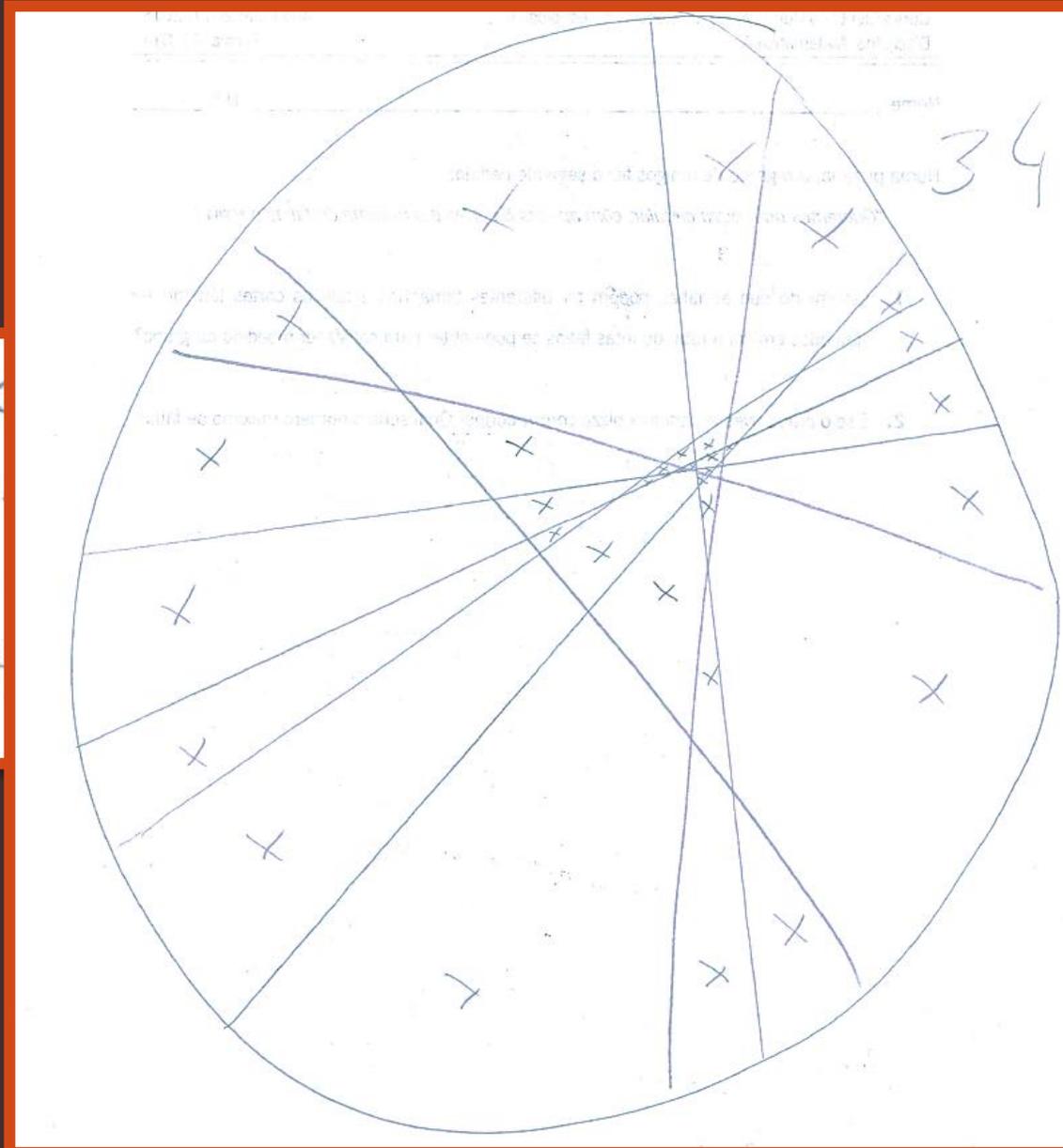
A22: Se conseguíssemos ver para cinco, se dá 16, depois os outros, se calhar...



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



1. 34 fatias, de ac
raciocínio, tentamos
intense faziam maion
ou seja fatias d



PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA

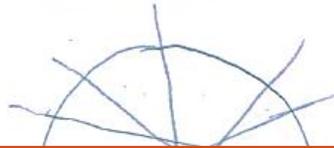


1º passo

Comecemos por fazer um desenho para nos ajudar a perceber quantas fatias conseguimos obter com 1 corte.

1 pizza - 1 fatia

- 1º corte → 2 fatias
- 2º corte → 4 fatias
- 3º corte → 7 fatias
- 4º corte → 11 fatias
- 5º corte → 16 fatias
- (...)



$$U_m = \begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{m+1} = U_m + m \end{cases}$$

Seja u_m o nº de fatias obtidas com m cortes.

A percebemos
do que o número

Assim sendo, por cada corte vai haver um aumento do número de fatias igual ao número do corte.

- (...)
- 5º corte → 16 fatias
- 6º corte → 22 fatias
- 7º corte → 29 fatias
- 8º corte → 37 fatias

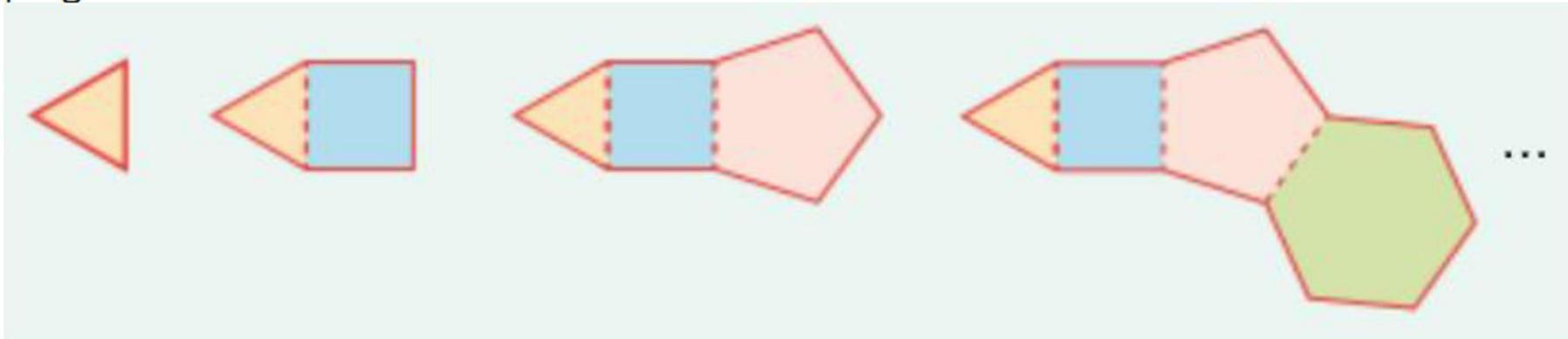
R: Com 8 cortes conseguimos um máximo de 37 fatias.

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



10. Na figura estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência infinita de polígonos.



Admite que o padrão de construção se mantém. O termo de ordem n , sendo $n \geq 2$, obtém-se do anterior juntando-lhe um polígono regular com $n+2$ lados. Seja (u_n) a sucessão em que o termo geral representa o número de lados do polígono de ordem n .

10.1. Indica os valores correspondentes a u_4 , u_5 e u_6 .

10.2. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética? Justifica.

10.3. Sabe-se que: $u_1 = 3 \wedge \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n + 1$.

Mostra, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$.

PROBLEMA DOS CORTES NA PIZZA



Numa pizzaria, um grupo de amigos fez o seguinte pedido:

“Queremos uma pizza circular, com apenas 8 cortes e o máximo de fatias possível.”

1. Assumindo que as fatias podem ter diferentes tamanhos e que os cortes têm de ser efetuados em linha reta, quantas fatias se pode obter para satisfazer o pedido do grupo?
2. E se o grupo tivesse pedido a pizza com n cortes? Qual seria o número máximo de fatias?

Conexão

Acesso às estratégias, ideias e dificuldades

Desenvolveram capacidades de resolução de problemas

Aplicaram conhecimentos aprendidos sobre PIM



Universidade do Minho
Instituto de Educação

Obrigada pela atenção!

Antecipar estratégias e dificuldades na resolução de problemas matemáticos

Letícia Gabriela Martins | LGB.martins@hotmail.com

julho, 2019

Programa
SIEM
10.11 julho
12.13 julho

Castelo Branco
2019
Escola
Secundária
Amato Lusitano

APM
Associação de Professores
de Matemática