



Um Método de Ensino com Tarefas para Mediar Significados em Matemática

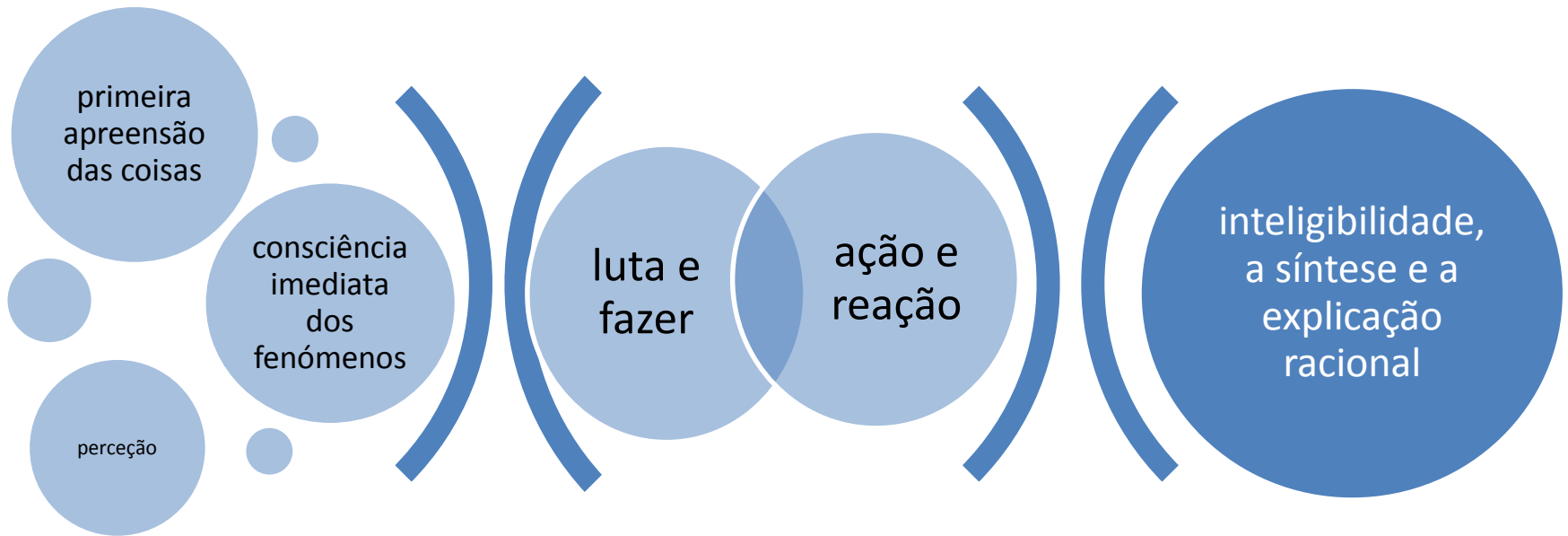
Ensino de parâmetros em funções no 11.º ano de escolaridade

Magda Cristina Nunes Pereira

COMO PROMOVER E CONDUZIR a CONSTRUÇÃO DOS SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS DOS ALUNOS?



SEMIÓTICA, CHARLES *PEIRCE*



PRIMEIRIDADE

**Qualidade e
Sentimento**

Abdução

SECUNDIDADE

Experiência

Indução

TERCEIRIDADE

**Pensamento e
Lei**

Dedução

SEMIÓTICA

- Signo. Primeiridade, Secundidade e Terceiridade (**Peirce, 1978**)
- Ciclo didático (**Bussi & Mariotti, 2008**)
- Mediação semiótica de significados (**Vygotsky, 1978, 1981**)
- Representações Matemáticas (**Duval, 2006; D'Amore, 2006; Radford, 2006**)

ÁLGEBRA

- Transição da aritmética à álgebra (**Sfard, 2008; Gravemeijer, 2005**)
- Parâmetro e funções (**Ursini & Trigueros, 2004**)

ENSINO DA MATEMÁTICA CENTRADO NO ALUNO

- Modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar (**Ponte & Serrazina, 2000; Schoenfeld, 1985; Pereira & Saraiva, 2005**)
- Professor-Aluno-Matemática-Tarefa (**Rezat & Sträßer, 2012; Chapman, 2013; Bingolbali & Bingolbali, 2015**)

O Professor MEDIADOR de APRENDIZAGENS

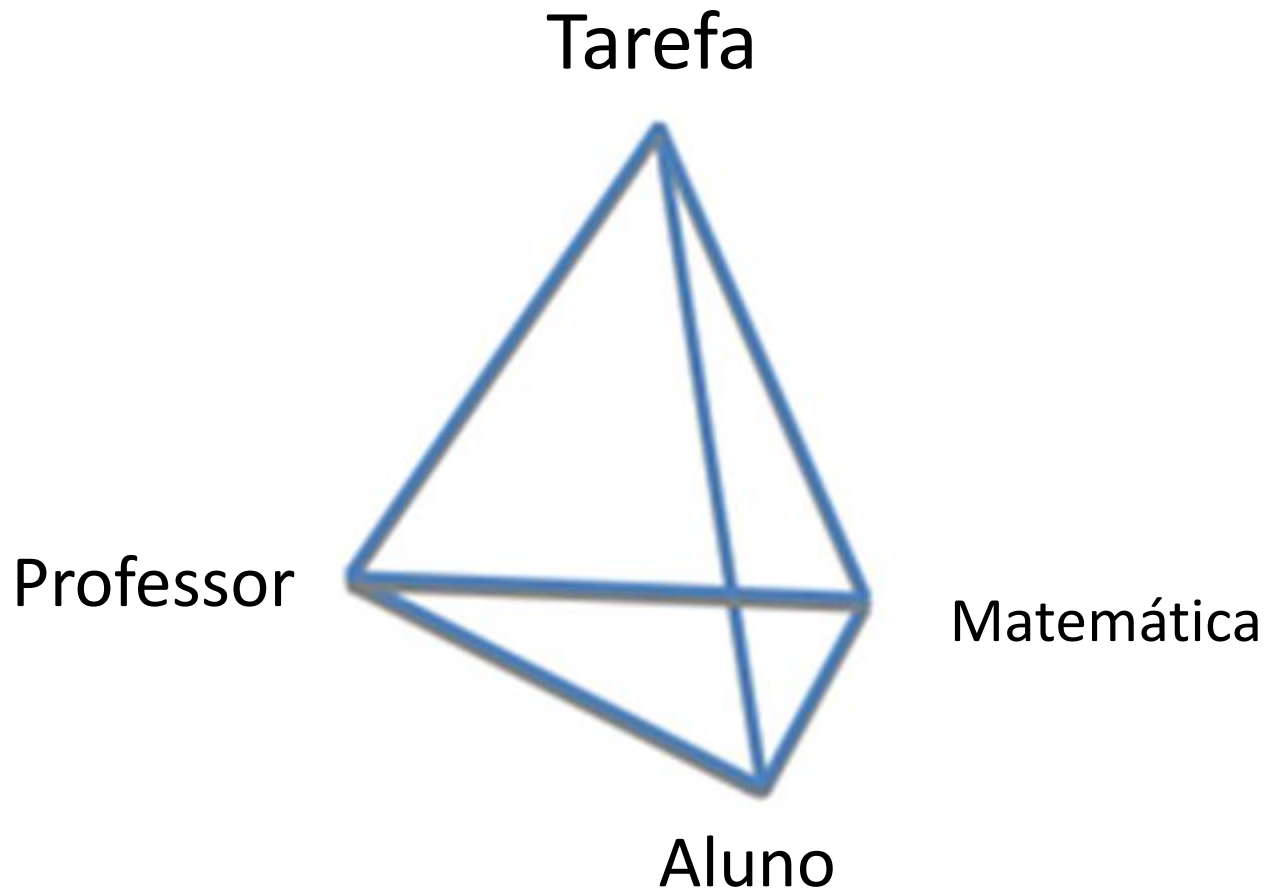
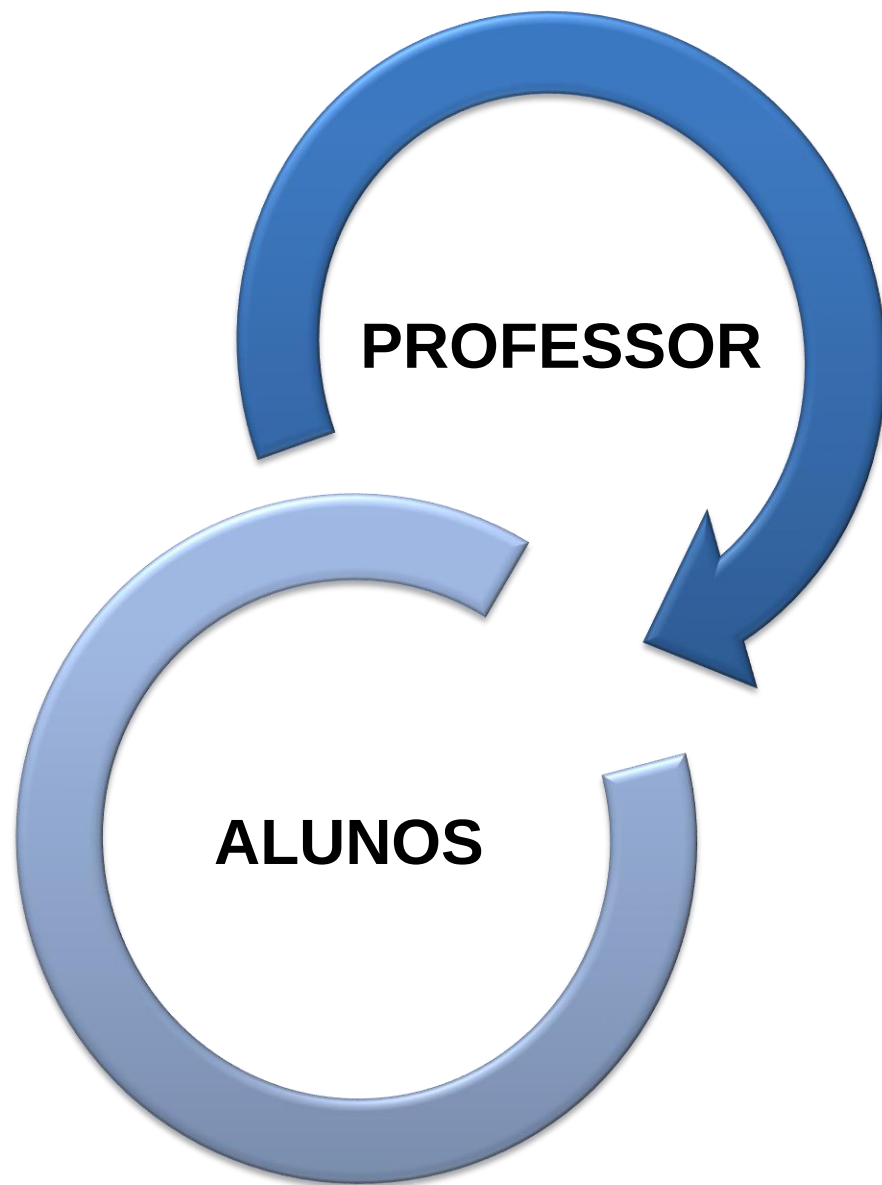


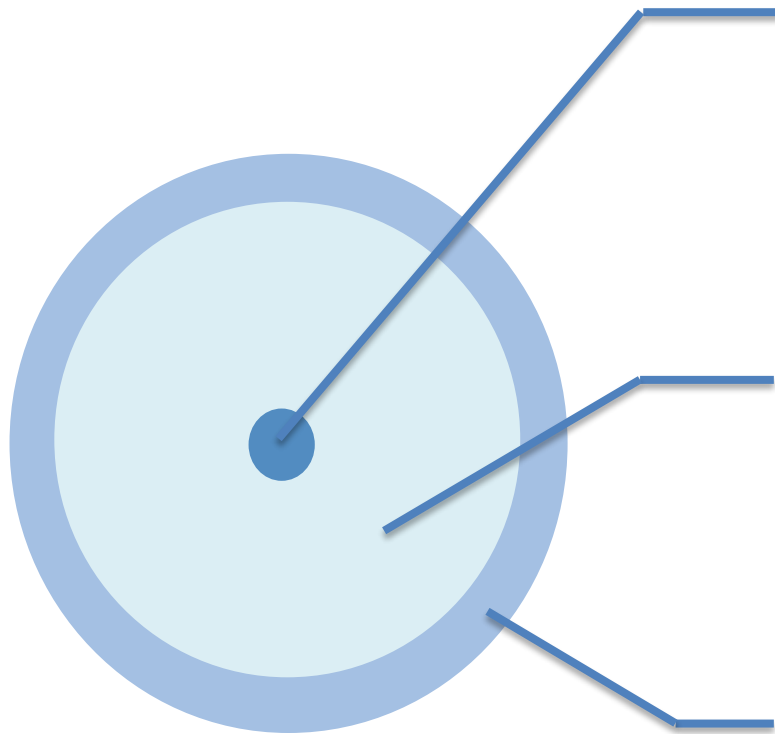
Figura 1: *Tetraedro socio-didático*, Rezat e Sträßer (2012)



- Como é que um **MÉTODO** de **ENSINO** e **APRENDIZAGEM** pode funcionar como **MEDIADOR DA ATIVIDADE** do professor?
- Como é que **TAREFAS** matemáticas elaboradas e implementadas com base num método funcionam como **ARTEFACTOS** de **MEDIAÇÃO SEMIÓTICA** de **SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS** dos alunos?

O MÉTODO de ENSINO aplicado aos Parâmetros em Funções

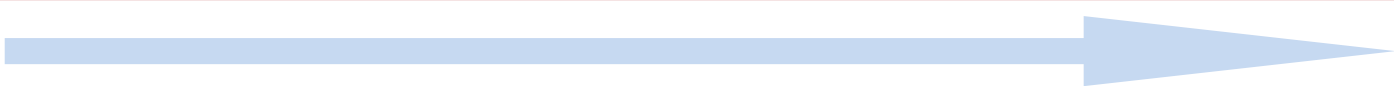
O aluno transforma e converte significados



1.º: **Nível (N1)**: Contextos aritméticos das variáveis e do(s) parâmetro(s).

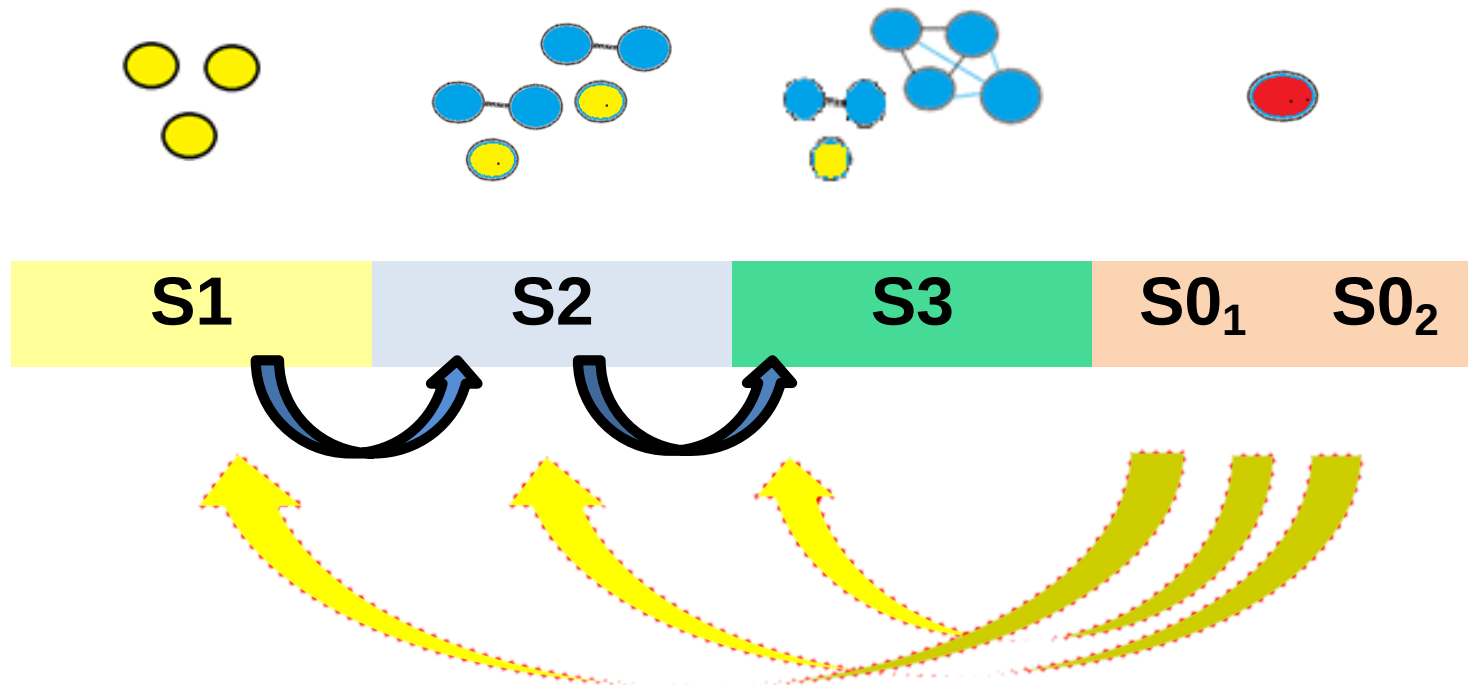
2.º: **Nível (N2)**: Contextos algébricos genéricos das variáveis e contextos aritméticos do(s) parâmetro(s).

3.º: **Nível (N3)**: Contextos algébricos genéricos das variáveis e do(s) parâmetro(s).



Significados de Grau 1	Significados de Grau 2	Significados de Grau 3	Significados de Grau 0
Construídos em N1, N2, N3, na PRIMEIRIDADE	Construídos em N1, N2, N3, na SECUNDIDADE	Construídos em N1, N2, N3, na TERCEIRIDADE	Construídos em N1, N2, N3. NÃO se enquadram no sistema de evidências e verdades definidas na própria matemática
Signos Ícones em raciocínios abduativos, indutivos e dedutivos construídos em N1, N2, N3	Signos Índices em raciocínios indutivos e dedutivos construídos em N1, N2, N3	Signos Símbolos em raciocínios dedutivos, construídos em N1, N2, N3	Signos que não são representamen

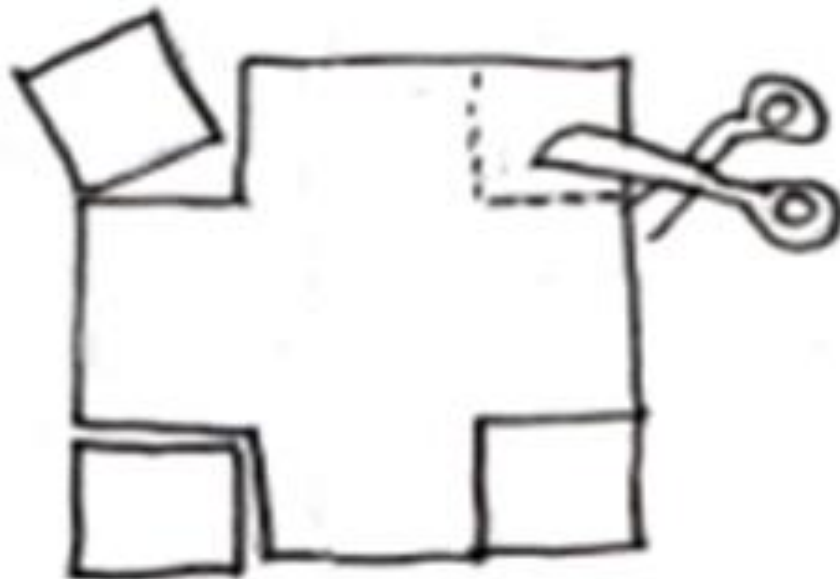
MEDIAÇÃO DOS SIGNIFICADOS CONSTRUÍDOS PELOS ALUNOS



1.º) Identificação do nível e do grau de significado em que se encontra o aluno no início do episódio de mediação

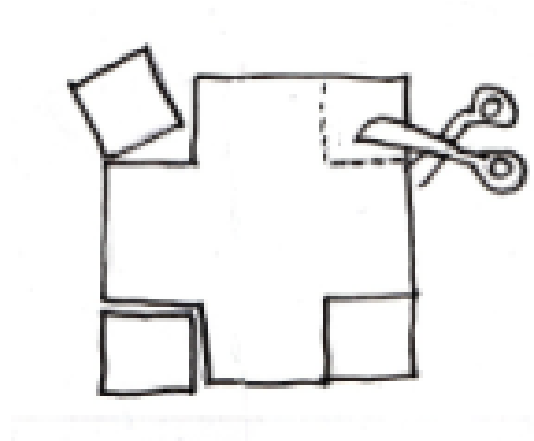
2.º) Mediação semiótica do professor de acordo com a **Intencionalidade** do S3

“Pretendemos construir uma caixa e dispomos de um pedaço de cartão quadrado. Para tal, cortamos, aos quatro cantos do cartão, quadrados iguais. Que modelo matemático nos permite maximizar o volume da caixa, dependendo do lado do quadrado cortado?”



A Mediação pelas Tarefas

Em cada alínea da tarefa que se segue expliquem detalhadamente e de modo explícito todos os vossos raciocínios – usando esquemas, tabelas, linguagem natural, cálculos auxiliares que necessitem realizar, expressões simbólicas e gráficos que construam (quer usando a tua calculadora gráfica, geogebra, quer recorrendo a gráficos que traduzam informalmente o raciocínio matemático que usaram para resolver a questão).



1. Começam por atribuir **vários valores concretos** para o lado do cartão:

1.1. **Com cada um desses valores**, definam uma estratégia que vos permita relacionar as dimensões da caixa (largura, comprimento e altura) com o seu volume – comecem por explorar a situação concretizando valores possíveis para o lado do quadrado cortado, usando um esquema, uma tabela, ou explicitando a situação por meio de linguagem natural.

1ºNível

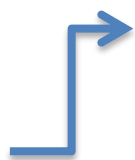
1.2. Construa um modelo matemático que permita calcular o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado?

1.3. Quais deverão ser as dimensões da caixa de modo a que o seu volume seja máximo? (recorram à calculadora gráfica ou ao geogebra para explorarem esta questão, explicando detalhadamente todos os vossos raciocínios).



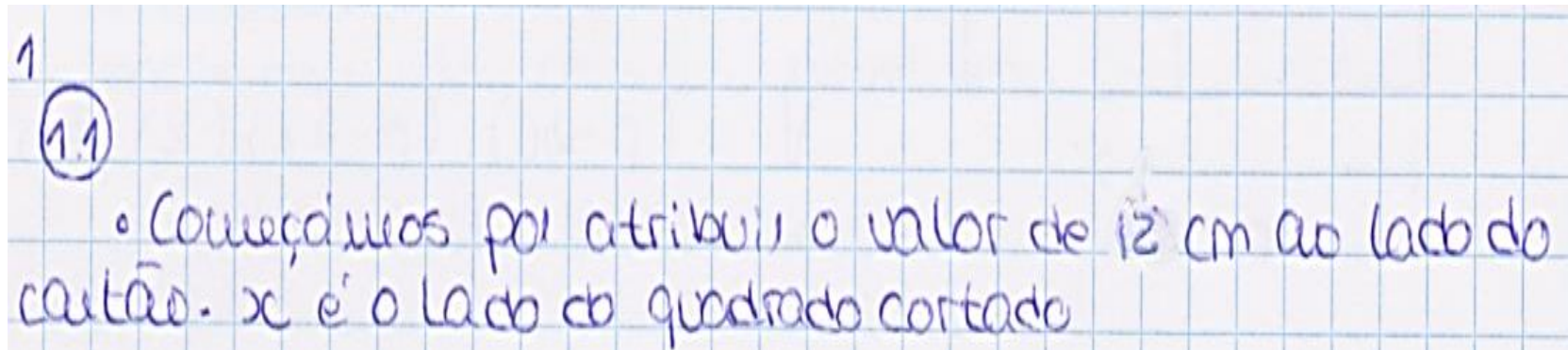
2º Nível

2. Considerem agora que o cartão tem p cm de lado. Qual é a expressão algébrica que traduz o volume da caixa em função do lado do quadrado cortado.

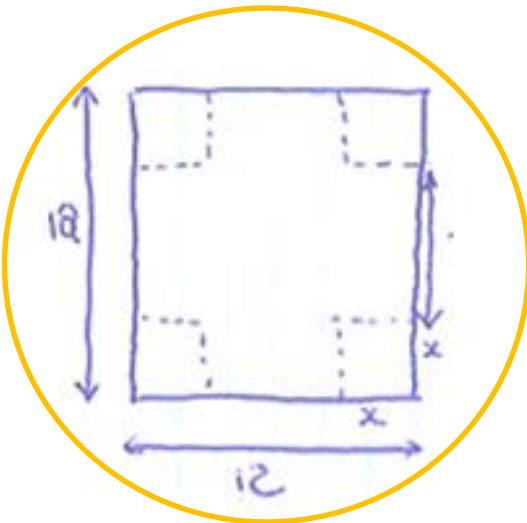


3º Nível

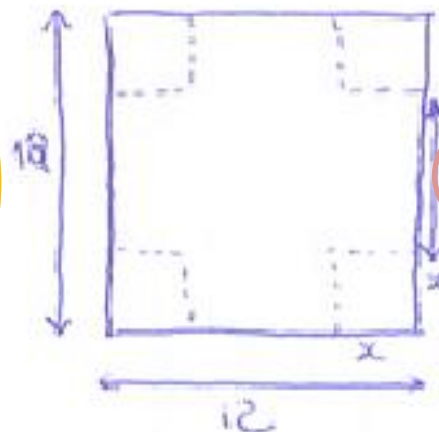
Interpretação do Enunciado. Incógnita, variável e parâmetro



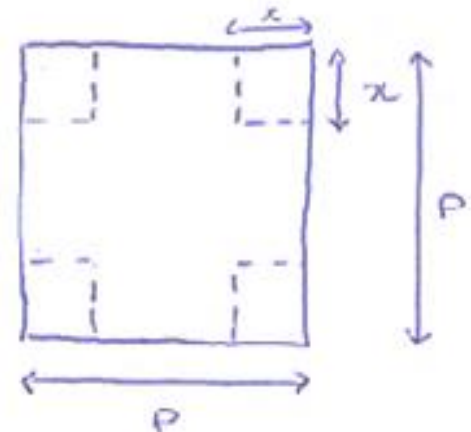
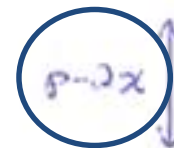
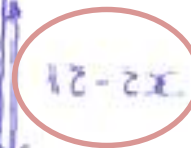
Raciocínio abdutivo representado por signos ícones: significado N1S1D2, na questão 1.1, tarefa “A caixa de volume máximo”, do grupo 1



N1S1D2, do grupo 1



N1S2D2, do grupo 1



N3S2D2, do grupo 1

Transformação e Conversão de Significados

$$V = A b \times h$$

$$V = (12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \cdot x$$

$$V = (12 - 2x)^2 \cdot x$$

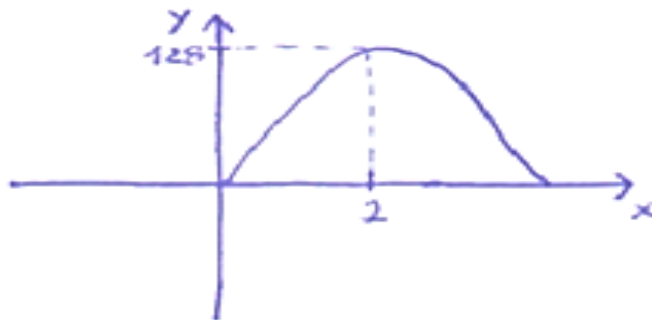
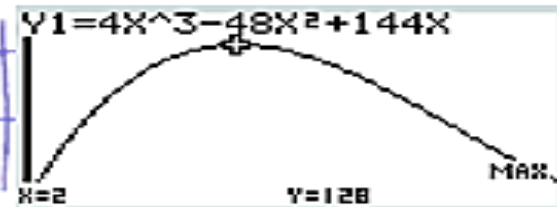
$$V = (4x^2 - 48x + 144) \cdot x$$

$$V = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

$$12x^2 - 96x + 144$$

$$x = 6 \quad \vee \quad x = 2$$

x	0	2		6	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$



$$x = 2$$

Janela :

$$x \text{ max} : 5$$

$$x \text{ min} : 0$$

$$y \text{ max} : 144$$

$$y \text{ min} : 0$$

MEDIAÇÃO SIGNIFICADOS: FOCALIZAÇÃO em aspetos particulares do raciocínio

Eva: Professora, nós considerámos que o cartão tem 12 cm de lado. E experimentámos calcular o volume da caixa se os quadrados dos cantos tiverem 2 cm de lado.

N1S2D2

(...)

Lúcia: E depois experimentámos se tivesse 10 cm de lado.

Eva: E também fizemos com outros valores, mas se tiver 12 cm, percebemos que o corte não pode ter 6 cm, senão deixamos de ter caixa.

N1S2D2

Professora: Sim, muito bem. E então?

N1S2D1

Eva: Então se o lado do quadrado cortado for x , esse x não pode ser um número qualquer, acho eu.

N2S1D2

Professora: Pois não. Então vamos com calma. **Primeiro, construam um esquema que mostre o que vocês acabaram de dizer.**

N2S1D1

Depois vão ver que, com o esquema, é-vos mais fácil construir as restrições que a Eva começou a dizer que havia.

N2S2D1

MEDIAÇÃO SIGNIFICADOS: Promoção de *SÍNTESES* no raciocínio dos alunos

Professora: Expliquem-me como é que, na última questão, chegaram ao intervalo $\left]0, \frac{p}{2}\right[$ para o valor que o corte nos cantos do cartão pode assumir?

Marco: Não foi difícil porque nas alíneas anteriores já tínhamos experimentado o que é que acontecia à caixa quando o valor do lado era 12, 20, etc. E percebemos que não pode ser zero porque se fosse não construíamos caixa porque não teria altura.

Miguel: Pois, e não pode ser $\frac{p}{2}$ porque, se se cortar metade do cartão, não dá para fazer a caixa. Por exemplo, se o lado do cartão for 12 cm, não podemos cortar 6 cm.

(...)

Professora: E como é que derivaram a função $4x^3 - 4x^2p + p^2x$?

Marco: ... nessa função o p é como se fosse um número e portanto basta pensarmos como pensamos para um número qualquer como o 2 ou o 3. E pensando assim não foi difícil.

Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos

Para a determinação dos valores possíveis para a altura da caixa optamos por ir pela derivada e colocamos os Os de função derivada

$$V'(x) = 12x^2 + p^2 - 8xp$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + p^2 - 8xp = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{+8p \pm \sqrt{(8p)^2 - 4(12x)p^2}}{2 \times 12} \quad \Leftrightarrow x = \frac{8p \pm \sqrt{64p^2 - 48}}{24}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8p \pm \sqrt{16p^2}}{24} \quad \Leftrightarrow x = \frac{8p \pm 4p}{24} \quad \Leftrightarrow x = \frac{12p}{24} \quad \wedge \quad x = \frac{4p}{24}$$

$$\Rightarrow x = \frac{p}{2} \quad \wedge \quad x = \frac{p}{6}$$

$$x \in \left[\frac{p}{6}; \frac{p}{2} \right]$$

S0₁

A caixa não pode ter dimensões de $x = p/6$, pois não existe caixa assim aconteceu na 1.2. quando o $x = 6$.

Recuperação de significados para a síntese

x	0	2		6	
$V'(x)$	+	0	-	0	+
$V(x)$	↗	14	↘	m	↗

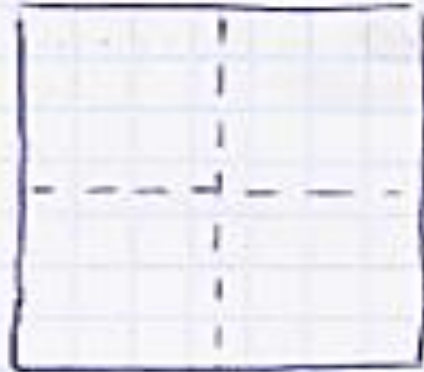
Raciocínio indutivo, signos índices
Significado N2S2D2, questão 1.3, do grupo 2

x	0	P/6		P/2	
$V'(x)$	+	0	-	0	+
$V(x)$	↗	N	↘	m	↗

Raciocínio indutivo, signos índices
Significado N3S2D2, questão 2, do grupo 2

A ordem e o encadeamento das questões da tarefa

A altura máxima que a caixa pode ter (considerando que o lado do cartão é p), é $\frac{p}{2}$, mas ou seja metade do comprimento do cartão. No entanto a altura nunca pode chegar a atingir esse valor, pois caso contrário deixaria a caixa deixaria de existir porque seria cortada na sua totalidade como se pode ver na imagem



Por outro lado, o valor mínimo que a altura da caixa pode ter é um valor infinitamente próximo de 0, mas que lhe seja superior, caso contrário a caixa também deixaria de existir, porque não ~~conseguir~~ possuir altura.

Raciocínio dedutivo representado por signos símbolos: significado N3S3D2, da questão 2, do grupo 1

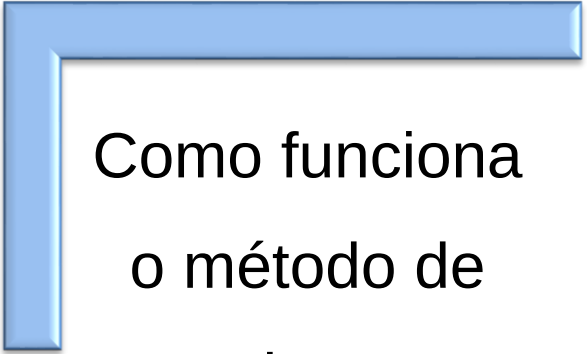
CONCLUSÕES: MÉTODO COMO UM MEDIADOR DA ATIVIDADE DO PROFESSOR

- ✓ As **tarefas** construídas sob o método tiveram um **papel mediador** no ensino dos parâmetros em funções [Rezat e Sträber (2012), Larke, Strømskag, Johnson, Bikner-Ahsbahr, & Gardner (2014)].
- ✓ A complementaridade **tarefas/professora**, constituiu, em si, um **artefacto de mediação de significados** matemáticos construídos pelos alunos.
- ✓ A **focalização para aspectos particulares do raciocínio dos alunos** e a indução para a **construção de sínteses** (Bussi e Mariotti, 2008) **estruturou**, não apenas **a resolução matemática dos alunos feita às questões das tarefas**, mas também as **diferentes estratégias usadas** pelos grupos de alunos durante a resolução das questões.

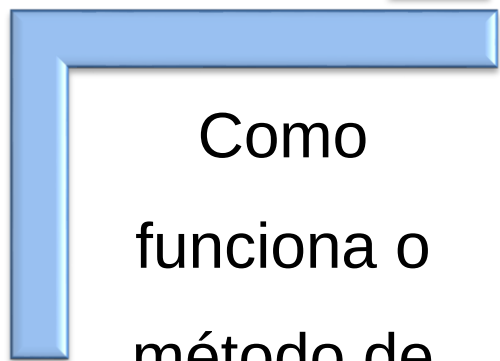
CONCLUSÕES: TAREFAS como ARTEFACTOS de MEDIAÇÃO SEMIÓTICA dos SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS dos ALUNOS

- ✓ A **ordem das tarefas** e o **encadeamento das questões** construídas sob o método tiveram um **papel mediador** na aprendizagem dos parâmetros em funções [Rezat e Sträber (2012), Larke, Strømskag, Johnson, Bikner-Ahsbahr, & Gardner (2014)]
- ✓ Os alunos compreenderam que a **concretização do parâmetro condiciona os valores das variáveis**. Esta compreensão remete-nos para o **parâmetro visto como a composição de generalizações**, concordantemente com Trigueros e Ursini (2003).
- ✓ Compreensão do **parâmetro como algo que pode ficar definido e que permite resolver os problemas matemáticos quando se lhe atribui um valor concreto**, de acordo com Trigueros e Ursini (2003).
- ✓ Registou-se uma clara compreensão da noção de **letra enquanto incógnita, enquanto variável de uma função e enquanto parâmetro**, na transformação e conversão de representações em registos gráficos, algébricos, esquemáticos e em linguagem natural, concordantemente com Duval (2006).

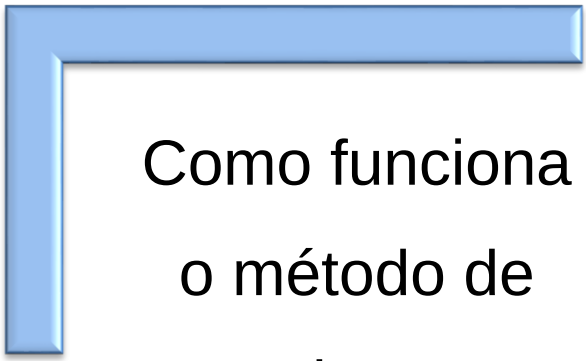
RECOMENDAÇÕES



Como funciona o método de ensino em contextos da matemática para além dos parâmetros em funções?



Como funciona o método de ensino em contextos de articulação e flexibilidade curricular?



Como funciona o método de ensino em alunos com necessidades específicas?



Um Método de Ensino com Tarefas para Mediar Significados em Matemática

Ensino de parâmetros em funções no 11.º ano de escolaridade

Magda Cristina Nunes Pereira